

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Рукович Александр Владимирович

Должность: Директор

Дата подписания: 22.11.2020 12:38:08

Уникальный идентификатор:
f45eb7c44954caac05ea7d4f32eb8d7d6b3cb96ae6d9b4bda094afddaffb705f

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Технический институт (филиал) федерального государственного
автоматизированного образовательного учреждения высшего образования
«Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»
НА ТЕМУ: «СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ»
ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ:
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»**

Нерюнгри 2017

Утверждено учебно-методическим советом ТИ (ф) ФГАОУ ВО «СВФУ»

Составитель:

В.М. Самохина, к.п.н., заведующая кафедрой МиИ

Рецензент:

М.Ю. Похорукова, к.т.н., доцент кафедры МиИ

Подготовлено на кафедре математики и информатики

Печатается в авторской редакции

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам очного отделения при выполнении расчетно-графической работы по дисциплине алгебра и геометрия. Методические указания содержат теоретический материал, необходимый для овладения знаниями по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», практические задания, варианты расчетно-графической работы, тесты для самоконтроля. Методическая разработка может быть использована студентами, как в процессе усвоения лекционного материала, так и во время практических занятий. Методические указания предназначены студентам первого курса для направления подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,

© Технический институт (ф) СВФУ, 2017

Оглавление

Методические указания.....	4
1. Основные понятия.....	6
2. Формулы Крамера	12
3. Матричный метод решения систем	16
4. Метод Гаусса	18
5. Расчетно-графическая работа по теме «Системы линейных алгебраических уравнений»	24
6. Тест для самоконтроля по теме	29
7. Литература	35

Методические указания

В соответствии с учебным планом и рабочей программой для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», предусмотрено выполнение расчетно-графической работы по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», а так же выполнение тестирования по данной теме. Данное методическое указание содержит основные понятия теории систем линейных уравнений, а так же методы их решений. Для выполнения данной РГР необходимы такие умения как: нахождение определителя, второго третьего и четвертого порядков, нахождение обратной матрицы, умножение матриц. Поэтому перед изучением данной темы необходимо пройти 1 часть тестирования, в случае если тест не пройден, требуется повторение разделов: «Вычисление определителя», «Нахождение обратной матрицы», «Действия над матрицами» используя прилагаемый список литературы.

Расчетно-графическая работа дисциплине «Алгебра и геометрия» призвана систематизировать знания, позволяет повторить и закрепить материал. Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач. Студент выполняет вариант РГР, номер которого совпадает с номером его фамилии в аудиторном журнале. РГР выполняется в соответствии с графиком изучения дисциплины, и сдаются на проверку преподавателю.

Критерии оценки расчетно-графической работы:

РГР оценивается по бально-рейтинговой системе, максимальный балл- 10, и включает следующие критерии:

1.Качество и правильность выполненных расчетов по задачам- максимальный балл -8 баллов

- РГР выполнена полностью, задания выполнены правильно, выполненные расчеты верны -8 баллов.
- РГР выполнена полностью, ход решения заданий верен, имеются неточности в расчетах – 1-7 баллов.
- РГР не выполнена – 0 баллов.

2.Своевременность выполнения – максимальный балл -2 балла

- Работа выполнена, в предусмотренные сроки – 2 балла.
- Работа сдана не вовремя – 0 баллов

В данном методическом указании так же представлены тесты для самопроверки. Цель тестирования – выявить уровень знаний студентов, оценить степень усвоения ими учебного курса, а также стимулирование активности их познавательной деятельности.

Шкала оценивания тестовых заданий части 1:

Процент выполненных тестовых заданий	Количество набранных баллов	Рекомендации
91% - 100%	10	Можно начать выполнение РГР
81% - 90%	9	
71% - 80%	8	
61% - 70%	7	
51% - 60%	6	Необходимо повторение материала
<50%	0	Необходимо повторение материала

Шкала оценивания тестовых заданий части 2:

Процент выполненных тестовых заданий	Количество набранных баллов
91% - 100%	10
81% - 90%	9
71% - 80%	8
61% - 70%	7
51% - 60%	6
<50%	0

1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

[illegible]

$x_1, x_2, \dots, x_n$ неизвестные, которые нужно найти;

 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, коэффициенты системы;

$b_1, b_2, \dots, b_m$, свободные члены.

В общем случае число уравнений в системе может не совпадать с числом неизвестных

СЛАУ (1) можно записать в матричной форме: $AX=B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ где}$$

A – матрица системы;

X – матрица-столбец неизвестных членов;

B – матрица-столбец свободных членов.

✓ **Определение:** Система называется *однородной*, если все её свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_m$ равны нулю.

✓ **Определение:** Система называется *квадратной*, если число m составляющих её уравнений равно числу неизвестных n .

✓ **Определение:** Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется *решением системы*, если после замены неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ каждое из уравнений системы превращается в верное числовое равенство.

✓ **Определение:** Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и называется *несовместной*, если не имеет ни одного решения.

✓ Определение:	Совместная система называется <i>определенной</i> , если она имеет единственное решение, и называется <i>неопределенной</i> , если у неё существуют, хотя бы, два различных решения.
-----------------------	--

При решении СЛАУ важную роль играет понятие ранга матрицы. С помощью ранга матрицы, не решая систему, можно установить её совместность или несовместность, а в случае совместности определить количество решений.

Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть k – натуральное число, не превосходящее m и n . Выделим в этой матрице любые k строк и k столбцов. Тогда элементы, стоящие на пересечении выделенных k строк и k столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k . Определитель этой квадратной матрицы называется определителем, порождённым матрицей A , или *минором k -го порядка матрицы A* .

✓ **Определение:** Рангом матрицы A называется число, равное наивысшему порядку миноров этой матрицы, отличных от нуля.

Обозначения: $r(A)$, $\text{rang } A$

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы её ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Докажем свойство 3:

К элементарным преобразованиям относят:

- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

1.) По свойству определителя при перестановке строк минор может изменить знак на противоположный (при перестановке двух строк), или не изменится, поэтому ранг матрицы останется тем же.

2.) При умножении строки на число $\lambda \neq 0$ минор, отличный от нуля,

умножится на λ . При этом, ни один минор, равный нулю, не станет отличным от нуля. Т.е. ранг матрицы не изменится.

3.) Если все миноры порядка $k+1$ равны нулю, то сложение строк не сделает ни один из них отличным от нуля. Поскольку полученный после преобразований минор либо равен алгебраической сумме двух миноров порядка $k+1$ исходной матрицы, либо он равен сумме минора порядка $k+1$ и определителя матрицы с двумя одинаковыми строками. Поэтому ранг матрицы не может повыситься. Однако он не может и понизиться, так как в противном случае при обратном преобразовании – вычитании строк – он бы повысился.

Таки образом, неизменность ранга матрицы при элементарных преобразованиях доказана полностью.

Ранг матрицы можно вычислить двумя способами: по определению и с помощью элементарных преобразований (приведением ее к каноническому виду)

Пример 1. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим миноры 1-го порядка, т.е. с элементы матрицы A . Выберем, например, минор $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца,

получаем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Вычислим к миноры 3-го порядка,

окаймляющим M_2 . Их всего два. Вычислим их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю. Тогда, по определению ранг матрицы A равен двум.

Ответ: $r(A)=2$

Пример 2. Найти ранг матрицы приведение ее к каноническому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сделаем следующие элементарные преобразования:
из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

из третьей строки вычтем первую; получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

данная матрица эквивалентна матрице A , так как получена из нее с помощью конечного множества элементарных преобразований. Ранг матрицы B равен 2, а следовательно, и $\text{r}(A)=2$. Матрицу B можно привести к каноническому виду, для этого вычитая первый столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы первой строки, кроме первого, причем элементы остальных строк не изменяются. Затем, вычитая второй столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы второй строки, кроме второго, и получим каноническую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В данном случае ранг матрицы равен числу ненулевых строк, их две, следовательно $\text{r}(A)=2$.

Ответ: $\text{r}(A)=2$

✓ **Определение:** Матрица системы, полученная добавлением столбца свободных членов, называется *расширенной*.

Для системы (1) расширенная матрица В имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

При решении СЛАУ необходимо определить:

- 1) Совместна данная система или нет.
- 2) Если система совместна, определить, сколько решений она имеет.
- 3) Найти все решения системы.

Исчерпывающий ответ на эти вопросы дают следующие теоремы:

Теорема Кронекера-Капелли: Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Теорема: Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема: Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

✓ Определение	Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным.
✓ Определение:	Общим решением системы с базисом называется совокупность значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, связанных формулами, которые выражают базисные переменные через свободные.
✓ Определение:	Частным решением системы называется решение, получаемое из общего решения при определённых значениях свободных неизвестных.

Алгоритм решения СЛАУ

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(B)$, то система несовместна.

2. Если $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r$, система совместна. Найти любой базисный минор порядка r , для этого выбрать r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор, а остальные уравнения отбросить. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют главными и оставляют слева, а остальные $(n - r)$ неизвестных называют свободными и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные, тем са-

мым, получить общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получить соответствующие значения главных неизвестных, это и будет частным решением исходной СЛАУ.

Пример 3. Исследовать систему на совместность, и решить ее.

$$\begin{cases} x - 2y + z + c = 1 \\ x - 2y + z - c = -1 \\ x - 2y + z + 3c = 3 \end{cases}$$

Решение: Найдем ранги основной и расширенной матрицы $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 2$ (проверить самостоятельно!)

Выберем два первых уравнения системы, поскольку они содержат базисный минор.

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Выразим главные неизвестные z и c через свободные x и y :

$$\begin{cases} z + c = 1 - x + 2y \\ z - c = -1 - x + 2y \end{cases}$$

решая систему, получим:

$$\begin{cases} z = -x + 2y \\ c = 1 \end{cases}$$

Придавая свободным переменным x и y произвольные значения, например $x=1, y=0$, получаем одно из частных решений: $x=1, y=0, z=-1, c=1$.

Ответ: Система совместна. $x=1, y=0, z=-1, c=1$.

Пример 4. Найти общее решение однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

Приведем ее к треугольному виду. Для этого: первую строку умножим на (-2) и прибавим ко второй; из четвертой строки вычтем первую. Получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Из второй строки вычтем третью

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Вторую строку умножим на 2 и вычтем четвертую из нее четвертую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

т.к. последние строки получились нулевые, вычеркиваем третью и четвертую строки. Получаем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r(A) = 2$. Значит, $r(A) < 5$, следовательно, система неопределенна. В качестве базисного выберем минор:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Переменные x_1 и x_3 – базисные, x_2 , x_4 и x_5 – свободные. Получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 - x_5 \\ x_3 = 2x_2 - 5x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

Взяв в качестве свободных неизвестных произвольные числовые значения t_2 , t_4 , t_5 , получим общее решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} -t_2 + t_4 - t_5 \\ t_2 \\ 2t_2 - 5t_4 + 3t_5 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $-t_2 + t_4 - t_5$; t_2 ; $2t_2 - 5t_4 + 3t_5$; t_4 ; t_5 .

2. Формулы Крамера

Рассмотрим решение системы, у которой число уравнений равно

числу неизвестных. Пусть мы имеем систему n линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

✓ **Определение:** Уравнения называются линейно независимыми, если ни одно уравнение системы не является линейной комбинацией остальных.

Составим определитель n -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

элементами которого являются коэффициенты при неизвестных системы (2). Данный определитель называется *определителем системы*.

Для линейной независимости уравнений системы достаточно чтобы определитель системы был отличен от нуля.

Отсюда следует, что для любого j ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$x_j = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (3)$$

где Δ_j – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой её j -го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Формулы (3) называются *формулами Крамера*.

Таким образом, получим, что квадратная система линейных уравнений с определителем системы, не равным нулю, имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера (3).

Пример 5. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + \quad \quad 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение: Найдем определитель системы $\Delta = |A| = -4$. Так как $\Delta \neq 0$, то решение системы по формулам Крамера имеет вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Вычисляем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, получаемые из определителя Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 19, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 22.$$

$$\text{Следовательно, } x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{19}{4}, \quad x_3 = -\frac{11}{2}.$$

Подстановкой найденных значений в уравнения системы убеждаемся, что данные значения являются решением системы.

$$\text{Ответ: } x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{19}{4}, \quad x_3 = -\frac{11}{2}.$$

Пример 5. Решить однородную систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Решение. Предположим, что хотя бы один из определителей, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

например, определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Тогда его можно принять за базисный минор; переменные x и y будут при этом базисными, а переменная z – свободной.

Оставляем базисные переменные в левой части, а свободную переносим в правую часть:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}.$$

Методом Крамера найдем выражение базисных неизвестных через свободные:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z \\ a_2 & -c_2 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z.$$

Поэтому общее решение заданной системы можно записать в виде

$$\left\{ x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \quad y = - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \quad z = z \right\}.$$

Обозначим отношение $\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ через t . Тогда общее решение задан-

ной системы примет вид:

$$\left\{ x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} t, \quad y = - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} t, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} t \right\}$$

Если определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, а $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ или $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то рассуждая аналогично, получим решения СЛАУ. Если все три определителя равны нулю, то одно уравнение есть следствие другого и решение системы сводится к решению одного уравнения с тремя неизвестными.

Ответ: $x = (b_1 c_2 - b_2 c_1)t$, $y = (-a_1 c_2 - a_2 c_1)t$, $z = (a_1 b_2 - a_2 b_1)t$

Пример 6. Найти общее решение СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}.$$

Решение. Это однородная система 2-х уравнений с тремя неизвестными, за базисный минор примем $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Переменные x, y - базисные, z - свободная.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -5z \\ x + 2y = 3z \end{cases}$$

Используя формулы Крамера, получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5z & -2 \\ 3z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{8}z = -\frac{1}{2}z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5z \\ 1 & 3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{14}{8}z = \frac{7}{4}z$$

Ответ: $-\frac{4}{8}z, \frac{7}{4}z, z$.

3. Матричный метод решения систем

Для получения решения системы (2) матричным способом заменим её эквивалентным матричным уравнением

$$A \cdot X = B, \quad (4)$$

где A – матрица системы, X – матрица-столбец неизвестных, B – матрица-столбец свободных членов.

Предположим, что система (1) совместна, следовательно, ее определитель $\Delta = |A| \neq 0$, поэтому, существует обратная матрица A^{-1} . Умножая слева обе части матричного уравнения (2) на матрицу A^{-1} , получим:

$$A^{-1}(A X) = A^{-1}B.$$

Используя свойства матриц имеем:

$$A^{-1}(A X) = (A^{-1}A) X = E_n X = X,$$

поэтому решением системы (2) будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B \quad (5)$$

При подстановке X в систему (2) получим верное тождество. (Проверить самостоятельно!)

Решение уравнения (4) в развёрнутой форме примет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

после умножения матриц получим решение СЛАУ матричным методом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Решить систему уравнений матричным способом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель системы $\Delta = |A| = -4$, то матрица A невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}. \quad (\text{Проверить самостоятельно!})$$

По формуле (5) находим решение системы в матричной форме:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -20 \\ 19 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -19/4 \\ -11/2 \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства двух матриц, получаем

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{19}{4}, \quad x_3 = -\frac{11}{2}.$$

Ответ: $x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{19}{4}, \quad x_3 = -\frac{11}{2}.$

Пример 8. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Это уравнение вида (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ следовательно, обратная матрица существует.}$$

ет.

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \text{ (проверить самостоятельно!)}$$

Найдем матрицу X :

$$X = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Метод Гаусса

Метод Гаусса решения СЛАУ состоит в последовательном исключении неизвестных при помощи элементарных преобразований.

Пусть задана произвольная система линейных уравнений (1). Будем считать, что $a_{11} \neq 0$ (если это условие не выполнено можно произвести перестановку уравнений). Исключим сначала неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Для этого разделим обе части первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$; тогда получим систему (6), равносильную данной:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ik}x_k + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mk}x_k + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \quad (6)$$

Далее, умножим первое уравнение системы (6) на $-a_{21}$ и сложим его почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим первое уравнение системы (6) на $-a_{31}$ и сложим его с третьим уравнением системы и так далее. В результате получим новую систему (7), равносильную данной:

(7)

$$\begin{aligned} a'_{1k} &= \frac{a_{1k}}{a_{11}}; & a'_{ik} &= a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1}, \quad (i = 2, 3, \dots, m; \quad k = 2, 3, \dots, n); \\ b'_1 &= \frac{b_1}{a_{11}}; & b'_i &= b_i - \frac{b_1}{a_{11}}a_{i1}, \quad (i = 2, 3, \dots, m). \end{aligned}$$
[illegible]

В результате выполнения метода Гаусса могут возникнуть следующие случаи:

1. При преобразовании получается противоречивое уравнение, левая часть которого равна нулю, а правая отлична от нуля; тогда можно сделать вывод о *несовместности* исходной системы (1).

2. При преобразовании система (1) приводится к *треугольному виду*:

[illegible]

Данная система уравнений определена. Из последнего уравнения находится значение переменной $x_n = b_n^{(n)}$. Подставляя это значение x_n во все уравнения системы, начиная снизу, найдем последовательно значения неизвестных $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$. Система (1) равносильна системе (9), поэтому полученное решение также будет единственным решением системы (1), т. е. она является *совместной и определённой*.

3. Система (1) преобразуется в *трапецевидную*:

[illegible]

причём $s < n$.

Покажем, что данная система является неопределённой. Для этого в последнем уравнении системы (10) выразим x_s через $x_{s+1}, \dots, x_n$, перенося члены с этими неизвестными в правую часть уравнения.

Перенося в каждом из уравнений системы (10) члены с неизвестными $x_{s+1}, \dots, x_n$ в правую часть, получим систему вида

[illegible]

Придавая *свободным* неизвестным $x_{s+1}, \dots, x_n$, произвольные значения $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \dots, \alpha_n$, получим треугольную систему вида (9), из которой последовательно находятся все остальные неизвестные $x_s, x_{s-1}, \dots, x_1$. Так как свободным неизвестным можно придать любые значения, то исходная система (1) имеет бесчисленное множество решений, т.е. является *неопределённой*.

Алгоритм принятия решения о совместности системы методом Гаусса

1) Если в методе Гаусса появится уравнение $0 = b$, где $b \neq 0$, то исходная система *несовместна*, т.е. решений не имеет.

2) Если система приводится к треугольному виду, то она является *оп-*

ределённой, т.е. решение системы существует и единственно.

3) Если система приводится к трапецевидной форме, то она является неопределённой, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

При решении СЛАУ методом Гаусса удобно записывать её в виде расширенной матрицы системы, составленной из коэффициентов при неизвестных и свободных членов, и выполнять затем элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса, со строками расширенной матрицы. Это сокращает запись решения СЛАУ.

Пример 9. Найти решение системы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную систему в виде расширенной матрицы системы и применим метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Знак $\sim$ при записи матриц означает равносильность соответствующих им систем линейных уравнений. Следовательно, полученной матрице соответствует система уравнений, равносильная заданной:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 - 6x_4 = 2, \\ x_4 = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Последовательно решая уравнения системы снизу вверх, получим решение

$$x_4 = -\frac{2}{5}, \quad x_3 = -\frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_1 = 1.$$

Ответ: $x_4 = -\frac{2}{5}, x_3 = -\frac{2}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_1 = 1.$

Пример 10. Найти значения a , при которых система имеет нетривиальные решения. Найти решения системы.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение. Однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения, когда ее определитель равен нулю. Из данного условия найдем соответствующие значения a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 4.$$

Найдем решения системы.

1) При $a = -1$ система имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Определитель данной системы равен нулю (проверить!), это означает, что существует линейная зависимость между уравнениями системы. Первое уравнение системы получено из второго и поэтому его можно отбросить. Имеем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Так как определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то в качестве базисных неизвестных примем x_1, x_2 и перенесем члены содержащие x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases}.$$

Полученную систему решим по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & -1 \\ -x_3 & -1 \end{vmatrix} = -2x_3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & -x_3 \end{vmatrix} = -3x_3.$$

Тогда $x_1 = -2x_3$, $x_2 = -3x_3$. Полагая $-x_3 = k$, где k – произвольное действительное число, получаем решение системы: $x_1 = 2k$, $x_2 = 3k$, $x_3 = -k$.

2) При $a = 4$ система имеет вид:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Гаусса. Составим расширенную матрицу системы:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ с помощью элементарных преобразований приведем ее к матрице ступенчатого вида:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{x_3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{3} \\ x_2 = \frac{x_3}{3} \end{cases}.$$

Полагая $x_3 = 3t$, где t – произвольное действительное число, получаем решение системы: $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = 3t$.

Ответ: $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = 3t$.

5. Расчетно-графическая работа по теме «Системы линейных алгебраических уравнений»

Задание 1. Вычислить ранг матрицы А двумя способами (приведением к ступенчатому виду и методом окаймляющих миноров).

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Исследовать СЛУ на совместимость и решить тремя способами (с помощью правила Крамера, методом Гаусса и средствами матричного исчисления).

$$1. \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -4 \\ 4 & 7 & -2 & -6 \\ 1 & -8 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$11. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & -11 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$2. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & -5 & -4 \end{array} \right)$$

$$12. \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$3. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & 9 & -4 & -1 \\ -2 & 6 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

$$13. \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$4. \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

$$14. \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$5. \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & -6 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$15. \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -6 & -15 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

$$6. \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 8 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$16. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

$$7. \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & -10 \\ -1 & 5 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$17. \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$8. \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -6 & -8 \\ 1 & 7 & -5 & -9 \\ 4 & 2 & -1 & -12 \end{array} \right)$$

$$18. \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 10 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$9. \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & -3 & -10 \\ 2 & 9 & -1 & 8 \\ -1 & 6 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

$$19. \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \end{array} \right)$$

$$10. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & -7 & -13 \end{array} \right)$$

$$20. \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -5 & -12 \\ -2 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Задание 3 Найти, при каких значениях a система имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.

$$1. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ ax - 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 5x + ay - 6z = 0 \\ 4x - 5y + az = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} ax - y - 2z = 0 \\ 2x + ay - z = 0 \\ x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 4x + y + 4z = 0 \\ ax - 2y - z = 0 \\ 7x - y + az = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + ay + 4z = 0 \\ x - 2y - 9z = 0 \\ 5x - 4y + az = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ ax + 2y - 3z = 0 \\ 7x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} ax - 3y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 2x - 2y + az = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ ax + 2y - 3z = 0 \\ 7x + ay - 2z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x - 3y + az = 0 \\ ax + 4y - 3z = 0 \\ 7x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 7x - 6y - z = 0 \\ ax + 3y - 4z = 0 \\ 4x + ay - 5z = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + az = 0 \\ ax + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ ax - 3y - 7z = 0 \\ 3x + ay - 6z = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} ax + 4y - 3z = 0 \\ x - 3y + az = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ ax - 3y - 7z = 0 \\ 3x + ay - 6z = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x + 4y + az = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ 4x + ay + z = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x + ay - 3z = 0 \\ ax - 3y + z = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} ax - y + 2z = 0 \\ 3x + ay - 3z = 0 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ x + ay - 3z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x + ay - 4z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \\ ax - y + z = 0 \end{cases}$$

Задание 4. Найти все решения системы

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 23 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 9 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

6. Тест для самоконтроля по теме

Часть 1

1. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется _____

2. Матрица, содержащая один столбец, называется _____.

3. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется _____

4. Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Да

Нет

5. Операция сложения матриц обладает свойствами. Указать верные свойства

$$A+B = B+A;$$

$$E+A = A;$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$A+O = A;$$

6. Элементарным преобразованием матриц является прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Да

Нет

7. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Да

Нет

8. Операция умножения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Да

Нет

9. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются _____

10. Вычисление определителя второго порядка осуществляется по правилу треугольника

Да

Нет

11. Знак определителя изменится при транспонировании.

Верно

Неверно

12. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Верно

Неверно

13. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Верно

Неверно

14.Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Верно

Неверно

15.Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Верно

Неверно

16.Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Верно

Неверно

17.Алгебраическим дополнением некоторого элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $n-1$ -го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Верно

Неверно

18.Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Верно

Неверно

19.Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна.

а)Нулю

б)единице

с)необходимы вычисления

20.Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель

а)не равен нулю

б)равен нулю

с)равен единице

21.Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Верно

неверно

22.Наибольший из порядков миноров матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы.

Верно

неверно

23.Наименьший из порядков миноров матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы.

Верно

неверно

24. Умножать на число можно:

- а) только прямоугольную матрицу;
- б) только матрицу-строку;
- с) только матрицу-столбец;
- д) любую матрицу;

25. При умножении матрицы на обратную к ней получаем:

- а) матрицу-столбец;
- б) матрицу-строку;
- с) единичную матрицу;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

26. Вычислить определитель

- ☐ 1) 0 ☐ 2) -1 ☐ 3) 9 ☐ 4) 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

27. Найти A^{-1} для матрицы

- 1) ☐ $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. 2) ☐ $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. 3) ☐ $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$. 4) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

28. С каким знаком в определитель 6-го порядка входит произведение $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$

- а) ☐ с минусом;
- б) ☐ с плюсом;
- с) ☐ данное произведение не входит в определитель 6-го порядка.

29. Найти произведение матриц АВ, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- ☐ 1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 2) не существует ☐ 3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

Часть 2.

30. Метод Крамера применим для решения системы линейных уравнений, если:

- а) матрица системы любая;
- б) матрица системы любая квадратная;

с) матрица системы квадратная и невырожденная.

31. Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная

- а) столбцом свободных членов
- б) единичной матрицей
- с) строкой свободных членов

32. Система уравнений называется совместной, если она имеет

- а) хотя бы одно решение
- б) ровно одно решение
- с) не одного решения

33. Система уравнений называется несовместной, если она имеет хотя бы одно решение

Верно неверно

34. Совместная система называется определенной, если она имеет

- а) единственное решение,
- б) более одного решения.
- с) Ни одного решения

35. Совместная система называется неопределенной, если она имеет более одного решения

Верно Неверно

36. Вопрос о совместности систем решает теорема

- а) Кронекера-Капелли.
- б) Гаусса
- с) Крамера

37. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Верно Неверно

38. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Верно Неверно

39. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений

Верно Неверно

40.Базисным минором матрицы A называют любой минор этой матрицы, порядок которого равен рангу матрицы A.

Верно неверно

41. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

ВерноНеверно

42.система записанная в матричной форме имеет вид

$$AX=B$$

$$AX+B=C$$

$$AX+BY=C$$

43.Если ранг совместной системы больше числа неизвестных, то система имеет

a)бесчисленное множество решений

b)Не имеет решения

c)такого быть не может

44.Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

ВерноНеверно

45.Метод Гаусса применим для решения системы линейных уравнений, если:

a)матрица системы квадратная и невырожденная;

b)матрица системы любая;

c)матрица системы любая квадратная.

46.Система линейных уравнений называется однородной, если ее правая часть:

a)отлична от нулевого вектора;

b)правая часть состоит только из нулей;

c)правая часть состоит только из отрицательных чисел;

d)правая часть состоит только из единиц;

47.Однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения, когда ее определитель равен нулю

ВерноНеверно

48.При каких значениях k система может обладать только нулевым решением?

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

1) $k=1, k=-1$

2) при любых k

3) $\square k \neq 1; k \neq -1$

4) $\square$ при $k=0$

49.Используя теорему Кронекера – Капели определить, является ли система совместной

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 = -4 \end{cases}$$

- a) ☐ система совместна;
- b) система несовместна.
- c) не возможно определить

50.Сформулировать правило решения совместной системы линейных уравнений.

- 1.Выбрать r уравнений системы, из коэффициентов которых составлен базисный минор. Остальные уравнения отбросить.
- 2.Неизвестные, коэффициенты которые вошли в базисный минор, оставляем слева, а остальные $n - r$ неизвестных переносим в правые части уравнений.
- 3.Найти частные решения исходной системы придавая свободным неизвестным любые числовые значения.
- 4.Получить общее решение системы, для этого найти выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные.
- 5.Найти ранг r матрицы A .

7. Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. для студ. вузов / Курош А.Г. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2008. - 431 с.
2. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов / Фадеев Д.К. - 5-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2007. - 416 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: учеб. для вузов / Ильин В.А., Позняк Э.Г. - 6-е изд., стер. - Москва: Лань, 2009. - 280 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс : учеб. пособие / Дмитрий Письменный. - 5-е изд. - Москва: Айрис-Пресс, 2007 - 252с.
5. Баранова Е.С. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие для студ. вузов / Е. С. Баранова, Н. В. Васильева, В. П. Федотов. - Санкт-Петербург: Питер, 2009 - 320с.