Министерство образования и науки Российской Федерации
Технический институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ СРС ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»
НА ТЕМУ: **«ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. БИНОМ НЬЮТОНА»**
ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ:
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»,
09.03.03 «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Нерюнгри
Издательство ТИ (ф) СВФУ
2016

Утверждено учебно-методическим советом ТИ (ф) ФГАОУ ВО «СВФУ»

Составители:
В.М. Самохина, к.п.н., заведующая кафедрой МиИ
М.Ю. Макарова, к.т.н., доцент кафедры МиИ

Рецензент:
В.Р. Киушкина, к.т.н., заведующая кафедрой ЭПиАП

Подготовлено на кафедре математики и информатики

Печатается в авторской редакции

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам очного отделения при выполнении самостоятельных (домашних) работ по дискретной математике. Методические указания содержат теоретический материал, необходимый для овладения знаний по теме «Элементы комбинаторики. Бином Ньютона», решенные задачи, упражнения для аудиторного и домашнего выполнения, тесты для самоконтроля. Методическая разработка может быть использована студентами, как в процессе усвоения лекционного материала, так и во время практических занятий. Методические указания предназначены студентам первого курса для направлений подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.03 «Прикладная информатика».

Оглавление

Методические указания ... 4

1. Основные понятия комбинаторики ... 6

2. Комбинаторные соединения без повторения ... 9

2.1. Перестановки без повторения ... 9

2.2. Размещения без повторения ... 10

2.3. Сочетания без повторения ... 11

Практическое занятие 1. Комбинаторные соединения без повторения. ... 12

Индивидуальные домашние задания ... 12

3. Комбинаторные соединения с повторениями ... 15

3.1. Перестановки с повторениями ... 15

3.2.Размещения с повторениями ... 16

3.3. Сочетания с повторениями ... 17

Практическое занятие 2. Комбинаторные соединения с повторениями и без повторений ... 18

18Индивидуальные домашние задания ... 22

3.4. Тест для самоконтроля «Основные элементы комбинаторики» ... 29

4. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля ... 32

4.1. Основные понятия ... 32

4.2. Связь бинома Ньютона с треугольником Паскаля ... 33

4.3. Свойства биноминальных коэффициентов ... 33

4.5. Обобщенная формула бинома Ньютона ... 37

Практическое занятие 3. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. ... 38

Индивидуальные домашние задания ... 39

4.6. Тест для самоконтроля по теме: «Бином Ньютона. Треугольник Паскаля» ... 42

ЛИТЕРАТУРА ... 45

ПРИЛОЖЕНИЕ ... 46

Методические указания

Основной формой обучения студента очного отделения является его самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, выполнение домашних индивидуальных заданий. В соответствии с учебным графиком для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.03 «Прикладная информатика» предусмотрено выполнение домашних работ, выполнение СРС, тестирование по теме: «Элементы комбинаторики. Бином Ньютона». Данное методическое указание содержит основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания, а также задания для аудиторных и домашних занятий. Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач.

Домашняя работа - это промежуточный метод проверки знаний студента с целью определения конечного результата в обучении по данной теме.

Индивидуальная домашняя работа по дисциплине «Дискретная математика» призвана систематизировать знания, позволяет повторить и закрепить материал. Студент выполняет вариант индивидуальной домашней работы, номер которого совпадает с номером его фамилии в аудиторном журнале. Домашние задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и сдаются на проверку преподавателю.

Критерии оценки индивидуальной домашней работы:

Индивидуальная домашняя работа (ИДР) оценивается по бально-рейтинговой системе, максимальный бал- 5, и включает следующие критерии:

1. Качество и правильность выполненных расчетов по задачам-максимальный балл -4 баллов

- ИДР выполнена полностью, задания выполнены правильно, выполненные расчеты верны -4 баллов.
- ИДР выполнена полностью, ход решения заданий верен, имеются неточности в расчетах – 1-4 баллов.
- ИДР не выполнена – 0 баллов.

2. Своевременность выполнения – максимальный балл -1 балл

- Работа выполнена, в предусмотренные сроки – 1 балл.

- Работа сдана не вовремя – 0 баллов

В данном методическом указании также представлены тесты для самопроверки. Цель тестирования – выявить уровень знаний студентов, оценить степень усвоения ими учебного курса, а также стимулирование активности их познавательной деятельности.

Перед изучением темы «Элементы комбинаторики» необходимо прохождение кейса «Трудная задача» представленного в приложении. Работа над кейсом может быть как индивидуальной, так и групповой.

1. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Комбинаторные задачи связаны с операциями над конечными множествами. Основными являются следующие типы задач:

1. **Упорядочение конечного множества.** Данная операция приводит к понятию *перестановки* и к задаче определения числа всех возможных перестановок из n элементов.
2. **Выбор подмножеств некоторого конечного множества.** Это приводит к понятию *сочетания* и к задаче определения числа всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов в каждом.
3. **Выбор упорядоченных подмножеств некоторого конечного множества**. Это приводит к понятию *размещения* и к задаче определения числа всех возможных размещений из n элементов по m элементов в каждом.

При решении комбинаторных задач используют два основных правила:

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать n способами, элемент b можно выбрать m способами, причем ни один из способов выбора элемента a, не совпадает со способом выбора элемента b, то выбор «или a, или b» можно осуществить $n + m$ способами.

Данное правило можно перенести и на случай k непересекающихся множеств: если элемент A_1 можно выбрать n_1 способами, элемент A_2 – n_2 способами, … , элемент A_k – n_k способами, причем ни один из способов выбора каждого элемента не совпадает со способами выбора всех отличных от него элементов, то выбор «или A_1, или A_2, или …, или A_k» можно осуществить $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать n способами, и если после каждого такого выбора элемент b можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары (a,b) , т.е. выбор «и a, и b» можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Это правило распространяется и на случай выбора упорядоченной последовательности любой длины: если элемент A_1 можно выбрать n_1 способами, затем для каждого из таких выборов элемента A_1 другой элемент A_2 может быть выбран n_2 способами, затем для каждого из таких выборов и элемента A_1, и элемента A_2, элемент A_3 может быть выбран n_3 способами и т.д., включая *k-й* элемент A_k, который может быть выбран n_k способами, то выбор «и A_1, и A_2, и…,и A_k» можно осуществить $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Рассмотренные правила используются для решения задач и при выводе комбинаторных формул.

Продемонстрируем применение данных правил при решении задач.

Пример 1. На первой полке стоит 3 книги, а на второй 5. Скольким способами можно выбрать книгу с первой или второй полки?

Решение: С теоретико-множественных позиций общее условие этой задачи можно сформулировать следующим образом: даны два конечных множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, число элементов которого равно $n(A) = n$, и $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, число элементов которого равно $n(B) = m$. Множества A и B не имеют общих элементов, т.е. не пересекаются.

Элемент, принадлежащий множеству или A, или B можно найти как пересечение множеств $A \cap B$. Так как $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ и тогда $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = n + m$.

Пусть A - множество книг на первой полке, B – множество книг на второй полке, т.к. по условию задачи $A \cap B = \varnothing$ и $n(A) = 3$, $n(B) = 5$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 3 + 5 = 8$ (способов).

Применим правило суммы: книгу с первой полке можно взять 3 способами, со второй - 5 способами, тогда книгу с первой или второй полки можно выбрать 3+5=8 способами.

Пример 2. На первой полке стоит 3 книги, а на второй 5. Скольким способами можно выбрать книгу с первой и второй полки?

Решение: Решение этой задачи сводится к подсчету числа упорядоченных пар, в которых известно число способов выбрать первую компоненту и вторую компоненту.

С теоретико-множественных позиций общее условие этой задачи можно сформулировать следующим образом: даны два конечных множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, число элементов которого равно $n(A) = n$, и $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$, число элементов которого равно $n(B) = m$. Множества A и B не имеют общих элементов. Множество всех упорядоченных пар, составленных из элементов A и B образуют декартово произведение этих множеств. Число элементов в декартовом произведение равно: $n(A\times B)=n(A)\times n(B)=n\times m$

Пусть А - множество книг на первой полке, В – множество книг на второй полке, т.к. по условию задачи $n(A)=3$, $n(B)=5$, то $n(A\times B)=n(A)\times n(B)=3\times 5=13$ способов.

Используем правило умножения. Книгу с первой полке можно взять 3 способами, а со второй - 5 способами, тогда книгу из первой и со второй полки можно выбрать 3·5=15 способами.

2. Комбинаторные соединения без повторения

При выборе комбинаторных соединений важно правильно выбрать формулу. Следующая схема поможет в правильном выборе:

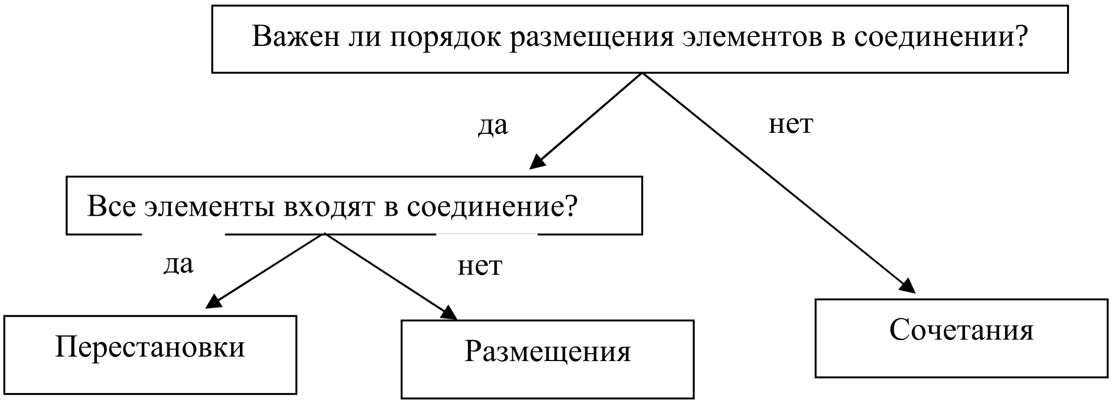

Схема. Выбор формулы

2.1. Перестановки без повторения

Определение. Перестановками из n элементов называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающихся только порядком их расположения элементов.

Обозначение: P_n (читается «число перестановок из эн»)

Утверждение. Число различных перестановками из n элементов равно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \tag{1}$$

Доказательство. При упорядочении n-элементного множества какой-то элемент получит номер один, какой-то – номер два и т.д. Номер один может получить любой из элементов множества. Значит, выбор первого элемента можно сделать n способами. Вторым элементом может быть любой из оставшихся, а значит, его можно выбрать (n – 1) способами. Третий элемент можно выбрать *(n – 2)* способами и т.д. На последнее место останется только один элемент, а значит выбрать его можно только одним способом. По правилу произведения получаем, что общее количество всевозможных перестановок из n элементов определяется по формуле (1). Утверждение доказано.

Следовательно,

$$P_n = n! \tag{2}$$

В задачах данного типа, ставится вопрос: сколькими способами можно переставить n различных предметов, расположенных на n различных местах?

Пример 3. На полке находятся пять книг различных авторов. Сколькими способами можно расставить их в один ряд?

Решение: Эта задача о числе перестановок семи различных книг, по формуле (2) $P_7 = 5! = 1\times2\times3\times4\times5\times = 120$, следовательно, имеется 120 способов осуществить расстановку книг.

Пример 4. Необходимо составить различные пятизначные числа используя цифры 0,1,2,3,4. Сколько таких цифр существует если ни одна цифра в записи числа не повторяется ?

Решение: По формуле (2) число всех возможных перестановок из пяти цифр равно $P_5 = 5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$, но в записи числа на первом месте не может стоять цифра нуль, поэтому из числа всех полученных комбинации нужно исключить перестановки вида, например 03412, 01243 и т.д. Найдем количество различных перестановок из цифр четырех 1, 2, 3, 4, применяя формулу (1): $P_4 = 4! = 1\times2\times3\times4 = 24$. Тогда искомое число есть $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$.

Данную задачу можно решить, используя правило произведения. На первое место можно поставить одну из цифр: 1,2,3,4 , т.е.существует 4 способа, на второе место – любую из четырех оставшихся (4 способа), на третье место, любую из трех оставшихся, на второе место – любую из двух оставшихся, на последнее место останется только один элемент, а значит выбрать его можно только одним способом., т.е. получим: $4\times4\times3\times2\times1 = 96$, т.е. выполнить условия задачи можно 96 способами.

2.2. Размещения без повторения

Определение Размещениями из n элементов по k элементов, называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов в каждом, которые отличаются друг от друга или составом элементов, или их порядком.

.*Обозначение*: A_n^k (читается «число размещений из эн по ка»)

Утверждение. Число всевозможных размещений без повторений из n элементов по k *находится по формуле:*

$$A_n^k = n\times(n-1)\times(n-2)\times..\times(n-k+1) \text{ или } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3)$$

*Доказательство. Н*а первом месте в упорядоченном k-элементарном подмножестве n-элементного множества можно поставить любой из n элементов множества. На второе место элемент может быть выбран $(n - 1)$ способами, на третье – $(n - 2)$ способами и т.д. На последнее место k-ое место можно поставить любой из оставшихся $n - (k - 1) = n - k + 1$ элементов. По правилу произведения можем записать

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

умножим и разделим правую часть равенства на $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-k)$, тогда получим:

$$A_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Утверждение доказано.

Пример 5. Сколькими способами можно разделить 3 путевки в различные санатории, если отдохнуть желают 6 человек?

Решение. Так как из 6 человек нужно выбрать 3, а затем распределить между ними различные путевки, то искомое число способов определяется по формуле (3).

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 120.$$

2.3. Сочетания без повторения

Определение *Сочетаниями из n элементов по k элементов,* называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов в каждом, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. (при этом порядок элементов при составлении сочетаний не учитывается.)

Обозначение: C_n^k (читается «число сочетаний из эн по ка»)

. Утверждение. Число всевозможных сочетаний из n элементов по k элементов подсчитывается по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (4)$$

Доказательство. Формула для числа сочетания (4) получается из формулы для числа размещений (3) и числа перестановок (2). Действительно, выбрать k из n разных элементов можно C_n^k способами, и в каждом из выбранных сочетаний имеется $k!$ возможностей упорядочить k элементов этого сочетания. Поэтому согласно правилу умножения, имеется

$C_n^k \cdot k!$ возможностей выбрать и разместить по k разных местам k из n разных элементов, т.е. $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда следует, что число сочетаний из n элементов по k в $k!$ раз меньше числа размещений из n по k, т.е. $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Тем самым утверждение доказано.

Пример 6. Сколькими способами читатель может выбрать три книги из пяти имеющихся?

Решение. Поскольку порядок элементов при выборе книг в искомом наборе не книг не учитывается, то искомое число способов равно числу сочетаний из пяти г по три. Поскольку $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{(3!)\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10$, то указанную выборку читатель может осуществить десятью способами.

Практическое занятие 1.
Комбинаторные соединения без повторения
Аудиторные задания

Задание 1. Упростить выражение $B = \frac{7!\cdot 4!}{10!}\cdot\left(\frac{8!}{3!\cdot 5!} - \frac{9!}{2!\cdot 7!}\right)$.

Решение. Так как $10! = 7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10$ и $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, то

$$\frac{7!\cdot 4!}{10!} = \frac{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{1}{30}.$$

Так как $\frac{8!}{3!5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5!} = 56$ и $\frac{9!}{2!7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 7!} = 36$, то

$\left(\frac{8!}{3!\cdot 5!} - \frac{9!}{2!\cdot 7!}\right) = 56 - 36 = 20$. Поэтому $B = \frac{1}{30}\cdot 20 = \frac{2}{3}$.

Задание 2. Вычислить $F = \frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}$.

Решение. Упростим выражение, применив формулу (3). Поскольку

$$\frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} = \left(A_{49}^{12} + A_{49}^{11}\right)\cdot\frac{1}{A_{49}^{10}} = \left(\frac{49!}{37!} + \frac{49!}{38!}\right)\cdot\frac{39!}{49!} = \frac{39!}{37!} + \frac{39!}{38!} = 38\cdot 39 + 39 = 39\cdot(38+1) = 39^2$$

и

$$\frac{A_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}} = \left(A_{17}^{10} + A_{17}^{9}\right)\cdot\frac{1}{A_{17}^{8}} = \left(\frac{17!}{7!} + \frac{17!}{8!}\right)\cdot\frac{9!}{17!} = \frac{9!}{7!} + \frac{9!}{8!} = 8\cdot 9 + 9 = 9\cdot(8+1) = 9^2,$$ то

$F = 39^2 - 9^2 + (39-9)(39+9) = 30\cdot 48 = 1440$.

Задание 3. Проверить равенство: $C_{13}^{9}+C_{13}^{10}=C_{14}^{10}$.

Решение. Вычислим по формуле (4) все числа сочетания, входящие в данное равенство.

$$C_{13}^{9}=\frac{13!}{9!\cdot(13-9)!}=\frac{(9!)\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{9!\cdot 4!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=715$$

$$C_{13}^{10}=\frac{13!}{10!\cdot(13-10)!}=\frac{(10!)\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{10!\cdot 3!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=286$$

$$C_{14}^{10}=\frac{14!}{10!\cdot(14-10)!}=\frac{(10!)\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{10!\cdot 4!}=\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=1001.$$

Подставив полученные значения, в исходное равенство $715+286=1001$, имеем верное тождество.

Задание 4. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

$$A_{n-2}^{3}=4\cdot A_{n-3}^{2}.$$

Решение. По формуле (3) $A_{n-2}^{3}=\frac{(n-2)!}{(n-2-3)!}=\frac{(n-2)!}{(n-5)!}$ и

$A_{n-3}^{2}=\frac{(n-3)!}{(n-3-2)!}=\frac{(n-3)!}{(n-5)!}$, подставив полученные выражения в исходное

уравнение, получим $\frac{(n-2)!}{(n-5)!}=4\cdot\frac{(n-3)!}{(n-5)!}$, далее сократим дроби

$(n-4)(n-3)(n-2)=4(n-4)(n-3)$, отсюда $n-2=4$, $n=6$.

Задание 6. Вычислить:

а) $\frac{99!-98!}{97!}$ в) $C_{21}^{4}/\left(C_{19}^{3}+C_{19}^{4}+C_{20}^{3}\right)$ д) $\frac{A_{12}^{4}-A_{11}^{4}}{A_{10}^{3}}$

б) $\frac{A_{12}^{6}\cdot 5!}{A_{11}^{9}}$ г) $\left(C_{15}^{8}+2C_{15}^{9}+C_{15}^{10}\right)/C_{17}^{10}$ е) $\frac{89!-88!}{87!}$

Задание 7. Проверить равенство:

а) $C_{12}^{4}+C_{12}^{5}=C_{13}^{5}$ в) $C_{16}^{12}=\frac{A_{16}^{4}}{P_{4}}$ д) $C_{17}^{10}-C_{17}^{9}=\frac{C_{18}^{10}}{2}$

б) $C_{14}^{6}+C_{14}^{7}=C_{15}^{7}$ г) $C_{15}^{12}=\frac{A_{15}^{3}}{P_{3}}$ е) $C_{16}^{9}-C_{16}^{8}=\frac{C_{17}^{9}}{2}$.

Задание 8. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию:

а) $\frac{C_{n+1}^{2}}{C_{n}^{3}}=\frac{4}{5}$ в) $C_{n-1}^{n-2}=n^{2}-13$; д) $A_{n-1}^{2}-C_{n}^{1}=79$;

б) $5C_{2n}^{n-1}=8C_{2n-1}^{n}$ г) $\frac{C_{n+1}^{3}}{C_{n}^{4}}=\frac{6}{5}$; е) $C_{n}^{n-2}+2n=9$

Индивидуальные домашние задания

Вариант 1

1. Вычислить: 1) $\left(\frac{P_3}{A_5^3}+\frac{P_2}{A_5^3}\right)\cdot A_5^2$
2. Проверить равенство: $C_{19}^{15}+C_{19}^{12}=C_{19}^{4}+C_{19}^{7}$
3. Найти все натуральные *n*, удовлетворяющие условию: $C_{n-1}^{n-2}=n^2-13$

Вариант 2

1. Вычислить: 1) $\frac{\left(A_5^3+A_5^2\right)}{C_5^2}+P_5\cdot C_4^3$
2. Проверить равенство: $C_6^4+3C_6^3+3C_6^2+C_6^1=C_9^4$
3. Найти все натуральные *n*, удовлетворяющие условию: $\frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4}\cdot P_3}=210$

Вариант 3

1. Вычислить: $\frac{\left(A_8^4+A_7^4+A_5^4\right)}{P_3}-C_6^3$
2. Проверить равенство: $C_2^0+C_3^1+C_4^2+C_5^3=C_6^3$
3. Найти все натуральные *n*, удовлетворяющие условию: $A_n^2-C_n^{n-1}=48$

Вариант 4

1. Вычислить: $\frac{\left(A_7^3+A_6^3+A_5^3\right)}{C_5^3}-P_4$
2. Проверить равенство: $C_{17}^{10}+C_{17}^{11}=C_{17}^{6}+C_{17}^{7}$
3. Найти все натуральные *n*, удовлетворяющие условию: $A_{n+1}^3+C_{n+1}^{n-1}=\frac{14}{n+1}$

Вариант 5

1. Вычислить: $\frac{\left(C_{14}^6+C_{14}^7\right)}{C_{15}^7}+A_5^3\cdot P_6$
2. Проверить равенство: $C_{15}^4+C_{13}^8=C_{13}^5+C_{15}^{11}$
3. Найти все натуральные *n*, удовлетворяющие условию:

$$A_{n+1}^{n-1}+2P_{n-1}=\frac{30}{7}P_n$$

Вариант 6

1. Вычислить: $\frac{\left(C_{14}^8+2C_{14}^9+C_{14}^{10}\right)}{C_{16}^{10}}$
2. Проверить равенство: $C_9^7\cdot C_{10}^9=C_{10}^2\cdot C_8^7$

3. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию: $7C_{2n-2}^{n-2} = 3C_{2n-1}^{n-1}$

Вариант 7

1. Вычислить: $\dfrac{\left(\frac{1}{3}C_6^2 - \frac{1}{28}C_8^3 + \frac{1}{64}C_{15}^3\right)}{P_3 \cdot A_5^2}$

2. Проверить равенство: $\dfrac{A_{20}^4}{P_4} = C_{20}^{16}$

3. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию: $A_n^4 = 15 \cdot A_{n-2}^3$

Вариант 8

1. Вычислить: $\dfrac{\left(A_5^3 + A_5^2\right)}{P_2} + \dfrac{P_6}{C_5^3}$

2. Проверить равенство: $C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 + C_6^3 = C_7^3$

3. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию: $A_n^4 + C_n^{n-2} = 14n$

Вариант 9

1. Вычислить: $C_{27}^{23} + C_{16}^{12} - 4C_9^6 \cdot \dfrac{A_5^2}{P_3}$

2. Проверить равенство: $C_8^3 \cdot C_{10}^8 = C_{10}^3 \cdot C_7^5$

3. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию: $\dfrac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \dfrac{24}{23}$

Вариант 10

1. Вычислить: $\dfrac{\left(C_{16}^9 + C_{16}^{10}\right)}{C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{16}^{10}}$

2. Проверить равенство: $\dfrac{A_{15}^8}{P_7} = C_{15}^7$

3. Найти все натуральные n, удовлетворяющие условию: $\dfrac{P_{n+5}}{A_{n+3}^7 \cdot P_{n-4}} = 240$

3. Комбинаторные соединения с повторениями

3.1. Перестановки с повторениями

Определение. Перестановки из n элементов, в каждую из которых входят n_1 одинаковых элементов одного типа, n_2 одинаковых элементов второго типа и т.д. до n_k одинаковых предметов k–го типа, где $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$, называются *перестановками из n элементов с заданным числом повторений*.

Обозначается число перестановок с повторениями символом $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$.

Утверждение. Число различных перестановок из n элементов с заданным числом повторений подсчитывается по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем некоторую перестановку из числа $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ всех перестановок с повторениями. В ней все возможные перестановки элементов первого типа, считая их разными, можно осуществить $n_1!$ способами, затем все возможные перестановки элементов второго типа, считая их разными, можно осуществить $n_2!$ способами и т.д., а затем все возможные перестановки элементов k-го типа, считая их разными, можно осуществить $n_k!$ способами.

Осуществляя все возможные перестановки только элементов каждого типа, получим $n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!$ перестановок, которые бы возникли из взятой перестановки с повторениями, если бы имелась возможность как-то различать входящие в каждый тип одинаковые элементы. Проделав это для каждой перестановки с повторениями, получим $n!$ - число всевозможных перестановок из n различных элементов.

Таким образом, $n_1! \times n_2! \times ... \times n_k! \times P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = n!$, отсюда следует формула для числа перестановок с повторением (5). Утверждение доказано.

Пример 7. Сколькими способами можно переставить буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Решение. В данном слове буква М повторяется $n_1 = 2$ раза, буква А повторяется $n_2 = 3$ раза, буква Т – $n_3 = 2$ раза, буква Е – $n_4 = 1$ раз, буква И – $n_5 = 1$ раз, буква И – $n_6 = 1$ раз причем $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_6 = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$.Поэтому по формуле (5) имеем

$$P_{10}(n) = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 151200$$ способами.

3.2.Размещения с повторениями

Определение. Размещения из n элементов, в каждое из которых входит k элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более k, называются *размещениями из n элементов по k с повторениями*.

Обозначение: $A_n^k(n)$.

Утверждение. Число различных размещений из n элементов по k с повторениями подсчитывается по формуле:

$$A_n^k(n) = n^k \qquad (6)$$

Доказательство. Поскольку каждый кортеж длины k, составленный из элементов множества М, элементом декартово произведения $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k\ раз}$, то число всех таких кортежей равно численности этого декартова произведения. Следовательно,

$$n(\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k\ раз}) = n(M) \cdot n(M) \cdot \ldots \cdot n(M) = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\ раз} = n^k.$$

Утверждение доказано.

Пример 8. Сколько всего телефонных номеров, не содержащих других цифр, кроме 1, 4, 3 и 8 существует, если каждый телефонный номер состоит из семи цифр.

Решение. Это задача о числе размещений на семи разных местах семи цифр, выбранных из четырех различных цифр с повторениями каждой из них любое число раз, но не более семи. Поэтому, применив формулу (6)

$$A_4^7(n) = 4^7 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16384$$

получим, что число всех указанных телефонных номеров равно 16384.

3.3. Сочетания с повторениями

Определение. *Сочетаниями из n элементов по k с повторениями* называются комбинации, содержащие k элементов (без учета порядка следования), причем любой элемент может входить в каждую комбинацию некоторое число раз, но не более k.

Обозначение: $C_n^k(n)$.

Утверждение. Число различных сочетаний из n элементов по k с повторениями подсчитывается по формуле

$$C_n^k(n) = \frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – n различных типов элементов. каждому сочетанию с повторениями из n по k поставим в соответствие комбинацию из нулей и единиц, составленную по следующему правилу: запишем столько единиц, сколько раз элемент a_1 входит в данное сочетание, затем запишем один нуль. После первого нуля запишем столько единиц, сколько раз элемент a_2 входит в это сочетание, затем пишем еще один нуль. После второго нуля запишем столько единиц, сколько раз элемент a_3 входит в сочетание, и т.д. После последнего $(n-1)$- го нуля запишем столько единиц, сколько раз элемент a_n входит в данное сочетание.

Если какой-то тип элементов из n указанных не входит в сочетание, то на соответствующем месте в комбинации единицы не пишутся, то есть нуль может стоять, по крайней мере, два раза подряд.

Очевидно, что построенные таким образом комбинации, являются перестановками с повторениями из нулей и единиц. Таким образом, всякому сочетанию с повторением ставится в соответствие перестановка с повторениями из элементов 0 и 1, в которой 0 повторяет $(n-1)$ раз, а 1 повторяется k раз, т.е.

$\tilde{C}_n^k(n) = P(n-1,k) = \dfrac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$. Утверждение доказано.

Пример 7. В почтовом отделении продаются открытки четырех видов. Сколькими способами можно купить здесь 9 открыток?

Решение. Применим формулу (7) к решению задачи. Очевидно, что число способов купить открытки равно числу различных сочетаний с повторениями из 4 элементов по 9, т.е. равно $\tilde{C}_4^9(n) = \dfrac{(4+9-1)!}{9!\cdot(4-1)!} = \dfrac{12!}{9!\cdot 3!} = 220$.■

Практическое занятие 2.
Комбинаторные соединения с повторениями и без повторений
Аудиторные задания

Задание 1. Скольким различными способами можно расставить на полке 9 книг, так чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение. Будем считать выделенные 4 книги за одну книгу, тогда для 6 книг существует $P_6 = 6! = 720$ способов перестановки. Но определенные 4 книги можно переставить между собой $P_4 = 4! = 24$ способами. По правилу умножения имеем $P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$ способов.

Задание 2. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (*все три кнопки нажимаются одновременно*), если на нем всего 10 цифр.

Решение: Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих трех кнопок – сочетание. Отсюда возможно

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{(7!)\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Задание 3. В кружке по информатике занимаются 10 студентов, кружке по математике – 15, в кружке по физике – 12 и в кружке по химии – 20 студентов. Сколькими способами можно составить команду из трех информатиков, четырех математиков и двух химиков?

Решение. Из 10 детей, занимающихся в кружке по информатике, нужно выбрать 3 человека, это можно сделать

$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{(7!)\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ способами.

Из 15 студентов, занимающихся в кружке по математике, нужно выбрать 4 человека, это можно сделать

$C_{15}^{4} = \frac{15!}{4!\cdot(15-4)!} = \frac{(11!)\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{4!\cdot 11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1365$ способами.

Из 20 человек занимающихся кружке по химии, нужно выбрать 2, это можно сделать

$C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!\cdot(20-2)!} = \frac{(18!)\cdot 19\cdot 20}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{1\cdot 2} = 190$ способами.

Тогда по правилу умножения, число способов составить команду, заданного в условии задачи, состава можно $C_{10}^{3}\cdot C_{15}^{4}\cdot C_{20}^{2} = 120\cdot 1365\cdot 190 = 31122000$ способами.

Задание 4. Из 8 баскетболистов и 4 волейболистов нужно составить команду из 6 человек, в которой должно быть хотя бы два волейболиста?

Решение. Существует три варианта составления указанной команды:

1) команда состоит из 2 волейболистов и 4 баскетболистов, число способов составить такую команду равно: $C_{4}^{2}\cdot C_{8}^{4} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot\frac{8!}{4!\cdot(8-4)!} = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 6\cdot 70 = 420$.

2) команда состоит из 3 баскетболистов и 3 волейболисов, число способов составить такую команду равно $C_{4}^{3}\cdot C_{8}^{3} = 4\cdot\frac{8!}{3!\cdot(8-3)!} = 4\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 56 = 224$.

3) команда состоит из 4 баскетболистов и 2 волейболистов, число способов составить такую команду равно $C_{4}^{4}\cdot C_{8}^{2} = 1\cdot\frac{8!}{2!\cdot(8-2)!} = 1\cdot\frac{7\cdot 8}{1\cdot 2} = 1\cdot 28 = 28$.

Следовательно, по правилу суммы число всевозможных способов составить такую команду равно $C_4^2 \cdot C_8^4 + C_4^3 \cdot C_8^3 + C_4^4 \cdot C_8^2 = 420 + 224 + 28 = 672$.

Задание 5. Сколькими способами можно распределить семь молодых специалистов по трем фирмам, в которым соответственно нужен один, два, четыре специалиста?

Решение. Из семи специалистов выбираем одного любого специалиста в первую фирму, это можно сделать $C_7^1 = 7$ способами. Затем из оставшихся шести специалистов выбираем любых двоих - $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{(4!) \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$ способами. Оставшиеся четыре специалиста направляются на работу в третью фирму, число способов выбрать их равно $C_4^4 = 1$. Тогда по правилу умножения число способов таких различных распределений равно $C_7^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$.

Другой вариант решение осуществляется по формуле (5)
$P_7(1,2,4) = \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{(4!) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(4!) \cdot 1 \cdot 2} = 105$.

Задание 6. Сколькими способами можно рассадить четырех студентов, участвующих в конференции на 25 местах, если известно, что один определенный студент должен сидеть на 10-ом месте?

Решение. Обозначим четырех студентов буквами *А, В, С, Д*. Пусть определенный студент *А* сядет на 10-ое место, тогда для оставшихся троих можно выбрать 3 места из 24 оставшихся мест, это можно сделать $C_{24}^3 = \frac{24!}{3! \cdot (24-3)!} = \frac{(21!) \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{3! \cdot 21!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024$ способами. Учитывая, что трое студентов на трех местах могут разместиться 3! различными способами, получим, что троих студентов на 24 местах можно рассадить $A_{24}^3 = 3! \cdot C_{24}^3 = 2024 \cdot 6 = 12144$ различными способами.

Задание 7. На конференции должны выступить 8 человек. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов так, чтобы между лицами *А* и *В* выступило не менее одного оратора?

Решение. Найдем сначала число способов размещения ораторов в списке так, чтобы сразу после оратора *А* выступал *В*. Считая ораторов *А и В* за одно лицо, получим 7! различных способов выступлений (число перестановок из 7 элементов). Тогда число всех возможных размещений ораторов в списке так, чтобы лица *А* и *В* выступали рядом, будет равно $2 \cdot 7!$ способам (возможны два варианта выступлений: *АВ* и *ВА).*

На собрании 8 ораторов могут выступить 8! различными способами. Тогда разместить ораторов так, чтобы между лицами A и B выступило не менее одного оратора, можно $8!-2\cdot7!=7!(8-2)=7!\cdot6=30240$ различными способами.

Задание 8. Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1, 2 и 3 места. две команды, занявшие последние места, выбывают из соревнования. сколько различных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд?

Решение. Первые три места можно распределить $A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=\frac{(7!)\cdot8\cdot9\cdot10}{(7!)}=8\cdot9\cdot10=720$ способами. В результате останется 7 команд, из которых 2 команды выбывают (в этом случае порядок выбывших команд не важен), число всех возможных способов выбора этих команд находим по формуле (4) $C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot(7-2)!}=\frac{(5!)\cdot6\cdot7}{2!\cdot5!}=\frac{6\cdot7}{1\cdot2}=21$. Используя правило умножения, находим искомое число вариантов результата первенства $A_{10}^3\cdot C_7^3=720\cdot21=15120$.

Задание 9. Автомобильные номера состоят из двух или трех букв и трех цифр. Найдите число таких номеров, если используется двадцать четыре буквы латинского алфавита и десять цифр.

Решение. По условию задачи автомобильные номера могут быть типа AB123 (пятиразрядный) или AAB122(шестиразрядный), буквы и цифры могут повторяться

Пятиразрядные номера можно составить $\bar{A}_{24}^2(n)\cdot\bar{A}_{10}^3(n)=24^2\cdot10^3$ способами, шестиразрядные - $\bar{A}_{24}^3(n)\cdot\bar{A}_{10}^3(n)=24^3\cdot10^3$ способами. Так как пятиразрядные и шестиразрядные номера не совместны, то по правилу суммы всего автомобильных номеров будет $\bar{A}_{24}^2(n)\cdot\bar{A}_{10}^3(n)+\bar{A}_{24}^3(n)\cdot\bar{A}_{10}^3(n)=24^2\cdot10^3+24^3\cdot10^3$.

Задание 10. В цветочном магазине продаются цветы четырех сортов. Сколько можно составить различных букетов из пяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

Решение. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то число букетов равно числу сочетаний с повторениями из четырех элементов по пять в каждом. Следовательно, применяя формулу (7) находим что, можно составить $C_4^5(n) == C_{4+5-1}^5 = C_8^5 = \dfrac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = \dfrac{(5!)\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 56$ различных букетов.

Задание 11. Лифт, в котором находятся восемь пассажиров, останавливается на шести этажах. Пассажиры выходят группами по одному, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти, если на каждом этаже может выйти только одна группа пассажиров, при этом порядок выхода пассажиров одной группы не имеет значения?

Решение. Восемь пассажиров разбить на три группы по 1, 3 и 4 человека можно $P_8(1,3,4) = \dfrac{8!}{1!\cdot 3!\cdot 4!} = \dfrac{(4!)\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{(4!)\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 280$ способами. Выбрать три этажа для выхода из шести этажей можно $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \dfrac{(3!)\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 3!} = \dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$ способами. По правилу умножения находим общее количества способов $P_8(1,3,4)\cdot C_6^3 = 280\cdot 20 = 5600$.

Индивидуальные домашние задания

Вариант 1

1. Сколькими способами можно составить список из 8 человек?
2. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?
3. В некотором государстве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может наибольшая численность населения государства (наибольшее число зубов 32)?
4. Сколькими способами можно разделить 30 различных предметов на три группы так, чтобы в одной группе было 15 предметов, в другой - 10 предметов, в третьей - 5 предметов?
5. Сколько существует различных перестановок букв слова ДИФФЕРЕНЦИАЛ?
6. Из 8 ромашек и 5 хризантем нужно составить букет, содержащий 2 ромашки и 3 хризантемы. Сколько можно составить различных букетов?
7. В колоде 36 карт, из них 4 туза. Сколькими способами можно вытащить из колоды 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза?
8. У мамы три яблока, три груши и три банана. Каждый день в течение трех дней она выдает сыну по три плода. Сколькими способами это может быть сделано?

9. Из 9 пловцов и 4 прыгунов в воду нужно составить команду из 7 человек, в которую должно входить хотя бы два прыгуна. Сколькими способами это можно сделать?

10. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

Вариант 2

1. Сколько существует шестизначных чисел делящихся на 2?

2. Сколько существует таких перестановок семи учеников, при которых три определенных ученика находятся рядом с друг другом?

3. Сколько делителей имеет число 105?

4. Сколькими способами можно переставить буквы слова НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ так, чтобы буквы «Н» не стояли рядом?

5. Пятеро малышей выбирают сладости. Сколькими способами можно выбрать сладости, если каждый малыш может выбрать один из шести видов?

6. Бригада рабочих состоит из 2-х плотников, 3-х штукатуров и 1-го столяра. Сколько различных бригад можно составить из коллектива, в котором 15 плотников, 10 штукатуров и 5 столяров?

7. Сколько существует различных исходов эксперимента, связанного с пятью бросаниями монет? (Исходы двух экспериментов считаются различными, если очередность выпадения гербов в этих экспериментах не совпадает с очередностью выпадения «решек».)

8. Сколькими способами можно разложить в четыре кармана пять монет разного достоинства?

9. Пять шоколадок и три апельсина нужно разложить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин, и чтобы количество предметов находящихся в пакете было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

10. Пусть буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?

Вариант 3

1. Сколько различных трехзначных цифр можно составить из цифр 5, 6, 7, 8, 9 если цифры могут повторяться?

2. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд содержит от трех до десяти звуков?

3. Сколькими способами можно переставлять буквы слова НЕПРЕРЫВНОСТЬ?
4. Студенческий профком из 20 человек избирает председателя, секретаря и 3 членов комиссии. Сколько различных комиссий может быть составлено?
5. В магазине продаются шариковые ручки десяти видов. Сколькими способами можно купить набор из шести ручек, если в продаже ручек каждого вида имеется не менее шести?
6. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?
7. У Маши 10 книг по литературе, а у Пети – 8 книг по истории. Сколькими способами Маша и Петя могут поменяться друг с другом по 6 книг?
8. Сколькими способами можно выбрать шесть одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где имеется одиннадцать различных видов пирожных?
9. Расписание одного дня содержит 4 пары учебных занятий. Определить количество всевозможных расписаний при выборе при выборе из 9 дисциплин.
10. Скольким способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более пяти, а другой не более девяти человек?

Вариант 4

1. Сколькими способами можно разместить семь зайцев по семи клеткам, если в одну клетку можно посадить только одного зайца?
2. Сколько всего пятизначных четных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 7, 8 если цифры в каждом из этих чисел не повторяется?
3. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер из пяти цифр. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?
4. Даны 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?
5. 18 книг – 5 книг различных авторов и трехтомник одного автора – помещены на книжную полку. Сколькими способами их можно расставить на полке так, чтобы книги автора трехтомника стояли рядом?
6. Сколько различных перестановок в слове СТЕРЕОМЕТРИЯ?

7. По автомобильной трассе имеются шесть светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет два состояния: красный и зеленый?
8. Сколькими способами можно выбрать двух ответственных из группы в пятнадцать человек?
9. Из коллектива, в котором работает 18 человек, 4 сотрудника должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если директор, его заместитель и главный бухгалтер одновременно уехать не могут?
10. Восемь студентов должны написать отчет, содержащий 16 пунктов. Сколькими способами возможно распределение материала между ними, если два человека должны написать по три пункта, четыре - по два и два - по одному пункту отчета?

Вариант 5

1. Сколько существует различных телефонных номеров, если считать, что каждый номер содержит от пяти до семи цифр?
2. На столе лежит 6 красных и 5 зеленых карандаша. Сколькими способами можно выбрать три карандаша?
3. Сколько различных перестановок в слове БЕСКОНЕЧНОСТЬ?
4. Имеется 4 вида альбомов, 5 видов красок и 6 различных. Сколькими способами может быть накрыт выбран набор, содержащий все три предмета, если каждый получит один альбом, один вид красок и одну кисточку?
5. В выпуклом семиугольнике проведены всевозможные диагонали, при этом никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения указанных диагоналей?
6. Сколькими способами можно распределить 18 различных предметов между тремя лицами так, чтобы каждый получил шесть предметов?
7. В чемпионате по программированию участвуют 12 команд, чемпионат проводится в два круга (т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.
8. Из пяти химиков и трех математиков для участия в олимпиаде нужно составить команду из 5 человек, в которую должен входить хотя бы один химик. Сколькими способами можно это сделать?
9. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать чтобы каждая буква содержала не более 4 символов?

10. Отборочная комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще семи человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?

Вариант 6

1. Пятеро юношей и три девушки выбирают спортивную секцию. В секции борьбы и бокса принимают только юношей, а в секцию художественной гимнастики – только девушек, а в лыжную и конькобежную секцию – и юношей и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти восемь человек?
2. Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр?
3. Лифт останавливается на 9 этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 5 пассажиров, находящихся в кабине лифта?
4. Сколько существует различных перестановок в слове КОМБИНАТОРИКА?
5. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если используется двадцать четыре буквы латинского алфавита и десять цифр.
6. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитывается).
7. Для премий на математической олимпиаде выделено три экземпляра одной книги, два экземпляра другой книги и один экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек и каждому из трех призеров вручается только одна книга?
8. Сколько существует семизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
9. Садовник в течение трех дней должен посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить данную работу, если он будет сажать не менее двух деревьев в день?
10. Из пяти юношей и четырех девушек надо выбрать 5 человек так, чтобы среди них было не менее двух девушек. Сколькими способами можно это сделать?

Вариант 7

1. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 1,2,3,5,7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?
2. Сколькими способами можно рассадить на скамейке 8 человек?
3. Найти число наборов из восьми открыток, если в продаже имеются открытки десяти видов.
4. Участники шахматного турнира играют в зале, где имеются шесть столиков. Сколькими способами можно расположить шахматистов, если известны участники всех партий?
5. Сколькими способами покупатель может выбрать телевизор, холодильник и стиральную машину, если в магазине семь видов телевизоров и по шесть видов холодильников и стиральных машин?
6. Сколькими способами можно переставить буквы в слове ИНТЕГРИРОВАНИЕ?
7. Поезд метро делает 15 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 50 пассажиров, вошедших в поезд ?
8. Из 10 юношей и 6 девушками составляют 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?
9. На книжной полке помещается 8 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 3-й тома не стояли рядом?
10. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 8

1. В подразделении 20 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно выделить патруль, состоящий из трех солдат и двух офицеров?
2. Сколько диагоналей имеет выпуклый пятиугольник?
3. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 светящихся лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?
4. Восемь команд участвуют в розыгрыше первенства по волейболу, лучшие из которых занимают 1-ое, 2-ое, 3-ее места. Три команды, занявшие последние места выбывают из соревнования. Сколько разных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних трех команд?
5. Сколько различных перестановок можно получить из букв слова ПРОГРАММА?
6. Восемь студентов сдают экзамен по теории вероятностей. Сколькими

способами им могут быть поставлены оценки, если известно, что они могут получить только «хорошо» или «отлично»?

7. Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных распределений?

8. Общество состоит из семи мужчин и тридцати пяти женщин. Сколькими способами их можно сгруппировать в семь групп по шесть человек так, чтобы в каждой группе был мужчина?

9. Из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2,4,5 одновременно.

10. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 9

1. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 2, можно составить 0,1,2,3,4,5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

2. 12 человек играют в городки. Сколькими способами они могут выбрать команду из 4 человек на соревнование?

3. Сколькими способами можно разделить группу из 15 человек на две подгруппы так, чтобы в одной было четыре человека, а в другой 11?

4. Сколькими способами из семи видов открыток, имеющихся в автомате, можно составить набор из четырех различных открыток?

5. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 – второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких составов первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

6. Сколько ожерелий из не менее трех бусинок можно составить из семи бусинок разных размеров?

7. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколько различных перестановок можно получить из букв слова АЛГОРИТМИЗАЦИЯ?

9. Два курьера должны разнести 10 посылок по десяти адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

10. В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

Вариант 10

1. Сколькими способами можно составить список из семи человек?

2. Сколькими способами можно из 13 студентов группы выбрать старосту, его заместителя и три человека в редколлегию?
3. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
4. Сколько существует различных перестановок слова ДИСКРЕТНОСТЬ?
5. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.
6. Сколькими способами можно покрасить четыре комнаты, если имеется пять цветов краски и одну комнату красят в один цвет?
7. Сколько существует четырехзначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
8. В розыгрыше первенства страны по футболу участвует двенадцать команд. Команды, которые займут первое, второе и третье места, награждаются соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команды, которые займут последние пять мест, покинут высшую лигу. Сколько различных результатов первенства может быть?
9. Из трех математиков и десяти физиков надо составить комиссию в составе 8 человек. Сколькими способами можно это сделать, если в ней должен быть хотя бы один математик?
10. Из восьми различных цветов надо составить букет так, чтобы в него входило не менее трех цветов. Сколькими способами можно это сделать?

3.4. Тест для самоконтроля «Основные элементы комбинаторики»

1. Для всех комбинаторных задач характерно следующее условие:

а) в комбинаторных задачах используется выбор вариантов;

б) в комбинаторных задачах всегда используется понятие бесконечности;

в) в комбинаторных задачах иногда идет речь о конечных множествах;

г)) комбинаторные задачи приводят к решению уравнений.

2. Перестановки – комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся:

а) и составом элементов, и их порядком;

б) хотя бы одним элементом;

в) только одним элементом;

г) только порядком расположения элементов.

3. Размещения – комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждой, которые отличаются:

а) либо порядком элементов, либо их составом;

б) и составом элементов, и их порядком;

в) только порядком расположения элементов;

г) только составом элементов.

4. Сочетания – комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов в каждом, отличающиеся:

а) только одним элементом;

б) порядком их расположения;

в) двумя элементами;

г) хотя бы одним элементом.

5. Число сочетаний без повторений находится по формуле:

а) $C_n^m = \dfrac{(n-m)!}{m!}$;

б) $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$;

в) $C_n^m = n(n-m)...(n-m+1)$;

г) $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

6. Число перестановок из n различных элементов имеет следующую формулу для вычисления:

а) $P_n^k = (n-k)!$;

б) $P_n = n!$;

в) $P_n^m = \dfrac{(m-1)!}{(n+m)!}$;

г) $P_n^k = (n+k)!$.

7. Формула числа размещений имеет вид:

а) $A_n^m = n(n+1)...(n+m-1)(n+m)$;

б) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$;

в) $A_n^m = \dfrac{(n-m)!}{m!}$;

г) $A_n^m = \dfrac{n!}{m!}$.

8. Имеет место следующее правило подсчета различных размещений из n элементов по m элементов с повторением:

а) $A_n^m(n) = m^n$;

б) $A_n^m(n) = \dfrac{n}{m}$;

в) $A_n^m(n) = n^m$;

г) $A_n^m(n) = n \times m$.

9. Число сочетаний из n элементов по m с повторением, находится по формуле:

а) $C_n^m(n) = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}$;

б) $C_n^m(n) = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!n!}$;

в); $C_n^m(n) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!n!}$

г) $C_n^m(n) = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$.

10. Число всевозможных перестановок из n элементов с заданным числом повторений, имеет формулу для вычисления:

а) $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = (n-k)!$;

б) $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$;

в) $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!+n_2!+...+n_k!}$;

г) $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = (n+k)!$.

11. Формула связи между числом перестановок, размещений и сочетаний:

а) $A_n^m = C_n^m \times P_n$;

б) $A_n^m = C_n^m \times P_m$;

в) $A_n^m = C_n^m / P_m$;

г) $A_n^m = C_n^m / P_n$.

4. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля

4.1. Основные понятия

Блез Паскаль (1623-1662) сыграл важную роль в развитие комбинаторики. В частности, он исследовал свойства треугольной числовой таблицы, получившей наименование «треугольник Паскаля».

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
…………………………………………………………………..

В основе образования таблицы лежит «закон Паскаля», заключающийся в том, что каждое число является суммой двух ближайших к нему чисел предыдущей строки.

Члены каждой строки треугольника Паскаля нумеруются слева направо, начиная с нулевого. Так, второе место пятой строки занимает число 10. Число, стоящее на k-ом месте в n-ой строке будем называть, и обозначать через T_n^k ,так что, например T_0^0 =1, T_5^2 =10, T_6^4 =15. и т.д.

Треугольник Паскаля - это бесконечная числовая таблица, в которой по боковым сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц, получается как сумма двух предшествующих чисел.

К поздним временам можно отнести и Ньютона, имя которого связано с формулой бинома $(a+b)^n$. Ньютон указал в 1676 г. способ обобщения этой формулы на случай произвольного рационального (в том числе отрицательного) показателя.

Бином Ньютона это формула разложения произвольной натуральной степени двучлена $(a+b)^n$ в многочлен.

Определение. *Формула бинома Ньютона* для всех действительных чисел a, b и для всех натуральных чисел n имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad (8)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}$

и где коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*, а также числом сочетаний из n элементов по k.

4.2. Связь бинома Ньютона с треугольником Паскаля

Перейдем теперь к связи между биномиальными коэффициентами и треугольником Паскаля.

Рассмотрим примеры:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Мы видим, что для показателей n = 0,1,2,3,4 строки биномиальных коэффициентов совпадают соответственно с 0-й, 1-й, 2-й, 3-й, 4-й строками треугольника Паскаля.

Следовательно, и при произвольном n строка $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ совпадает с n-ой строкой треугольника Паскаля, а поэтому $C_n^k = T_n^k$.

4.3. Свойства биномиальных коэффициентов

Свойство 1. 1) $C_n^n = 1$, 2) $C_n^0 = 1$, 3) $C_n^1 = n$

Доказательство. Учитывая, что по определению 0! = 1, 1! = 1

1) Имеем $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!\cdot 0!} = \dfrac{n!}{n!\cdot 1} = 1$.

2) Имеем $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{0!\cdot n!} = \dfrac{n!}{1\cdot n!} = 1$.

3) Имеем $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{1!\cdot n!} = \dfrac{n!}{1\cdot n!} = n$.

Свойство 2. *Свойство симметрии (равенство Паскаля).*

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (9)$$

Доказательство. По определению имеем, что

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$ ч.т.д.

Следствие. Из правила симметрии следует, что биномиальные коэффициенты разложения, равноотстоящие от концов разложения, равны между собой.

Поскольку $C_n^0=C_n^n=1$, $C_n^{n-1}=C_n^1=n$, $C_n^{n-2}=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ и т.д.

Пользуясь этим свойством, можно упрощать вычисление биномиальных коэффициентов в тех случаях, когда $k>\frac{n}{2}$.

Пример 7. Вычислить C_{15}^{12}.

Решение. Применим свойство симметрии:

$$C_{15}^{12}=C_{15}^{15-12}=C_{15}^3,\ C_{15}^3=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2}=455.$$

Свойство 3. *Свойство сложения*

$$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1},(k<n) \tag{10}$$

Доказательство. Из определения вытекает, что

$$C_n^k+C_n^{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!}=$$

$$=\frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}=C_{n+1}^k$$

Пример 8. Вычислить $C_{100}^{100}+C_{100}^1$.

Решение. По свойству симметрии $C_{100}^1=C_{100}^{100-1}=C_{100}^{99}$.

По свойству сложения $C_{100}^{100}+C_{100}^{99}$, n = 100 и k = 100.

$$C_{100}^{100}+C_{100}^{99}=C_{100+1}^{100}=C_{101}^{100}$$

По свойству симметрии $C_{101}^{100}=C_{101}^{101-100}=C_{101}^1$.

По свойству 1: $C_n^1=n \Rightarrow C_{101}^1=101$.

Свойство 4. $C_n^k=\frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}=\frac{n}{n-k}C_{n-1}^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$

Доказательств. Докажем это свойство по частям.

4а $\frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}=\frac{n-k+1}{k}\times\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k$.

4б $\frac{n}{n-k}C_{n-1}^k=\frac{n}{n-k}\times\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k$.

4в $\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{k}\times\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$.

Свойство 5. $C_{n+m}^{n}C_{k}^{n+m} = C_k^n C_{k-n}^m = C_k^m C_{k-m}^n$.

Доказательство. Докажем эти равенства отдельно.

5а. $C_{n+m}^{n}C_{k}^{n+m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}\times\frac{k!}{(n+m)!(k-n-m)!} = \frac{k!}{n!m!(k-n-m)!} =$

$$= \frac{k!}{n!(k-n)!}\times\frac{(k-n)!}{m!(k-n-m)!} = C_k^n C_{k-m}^n$$

5б $C_{n+m}^{n}C_{k}^{n+m} = \frac{k!}{n!m!(k-m-n)!} = \frac{k!}{m!(k-m)!}\times\frac{(k-m)!}{n!(k-m-n)!} = C_k^m C_{k-m}^n$

Свойство 6. Формула бинома Ньютона $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

Доказательство. (методом математической индукции).

1) при n=0: 1=1, при n=1: $\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k b^{1-k} = b + a = (a+b)^1$

2) предположим, что равенство справедливо при $n=m$: $\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} = (a+b)^m$

3) докажем, что оно верно и при $n=m+1$, т.е.:

$$(a+b)(a+b)^m=(a+b)\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m+1-k}$$

Здесь в первой сумме сделаем замену $k+1=\lambda$, тогда

$$(a+b)\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} = \sum_{\lambda=1}^{m+1} C_m^{\lambda-1} a^{\lambda} b^{m+1-\lambda} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m+1-k} =$$

$$= C_m^m a^{m+1} b^0 + \sum_{\lambda=1}^{m} C_m^{\lambda-1} a^{\lambda} b^{m+1-\lambda} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m+1-k} + C_m^0 a^0 b^{m+1} =$$

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a^k b^{m+1-k}\left(C_m^{k-1} + C_m^k\right)$$

По свойству 3 имеем, что $C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k$, следовательно,

$$(a+b)\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} =$$

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k} = C_{m+1}^0 a^0 b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k} +$$

$$+C_{m+1}^{m+1}a^{m+1}b^0=\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}.$$

Таким образом, получим, что

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)(a+b)^m=(a+b)\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k}=\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{k}^{m+1}C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k}=(a+b)^{m+1} \text{ ч.т.д.}$$

Свойство 7. Сумма биноминальных коэффициентов членов разложения равна 2^n. Т.е.

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n. \tag{11}$$

Доказательство. Полагая в формуле бинома Ньютона $a = b = 1$ имеем, что

$$(1+1)^n = 2^n = C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^m+\ldots+C_n^n. \text{ ч.т.д.}$$

Следствие 1.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0. \tag{12}$$

Доказательство. Полагая в формуле бинома Ньютона $a = -1$, $b = 1$ получаем, что $(1-1)^n = 0 = C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+C_n^4-\ldots+(-1)^n C_n^n$. ч.т.д.

Следствие 2. Сумма биноминальных коэффициентов членов разложения, стоящих на нечетных местах, равна сумме биноминальных коэффициентов, стоящих на четных местах, и равно 2^{n-1}, т.е.

1) $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^m=2^{n-1}$, где m – наибольшее четное число.

2) $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots+C_n^m=2^{n-1}$, где m – наибольшее нечетное число.

Доказательство.

1) Сложением (11) и (12), после приведения подобных членов получим:

$$2C_n^0+2C_n^2+2C_n^4+\ldots+2C_n^m=2^n \Rightarrow 2\cdot\left(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^m\right)=2^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^m=\frac{2^n}{2} \Rightarrow C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^m=2^{n-1} \text{ ч.т.д.}$$

2) Вычитанием (11) и (12), после приведения подобных членов получим:

$$2C_n^1+2C_n^3+2C_n^5+\ldots+2C_n^m=2^n \Rightarrow\ 2\left(C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots+C_n^m\right)=2^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots+C_n^m=\frac{2^n}{2} \Rightarrow\ C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots+C_n^m=2^{n-1}\text{ ч.т.д.}$$

Таким образом, можно обобщить основные свойства бинома Ньютона:

1. Сумма показателей степени при a и b в каждом члене разложения равна n.
2. Правая часть формулы Ньютона содержит $(n+1)$ слагаемых.
3. Общий член разложения (T_{k+1}) имеет вид

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k \tag{13}$$

где $k=\overline{0,n}$.

T обозначает член разложения, а индекс $(k+1)$ - его порядковый номер в разложении бинома, считая слева направо. Так,

1-й член (T_1) получим, если $k=0: T_1=T_{0+1}=C_n^0 a^{n-0} b^0$;

2-й член (T_2) получим, если $k=1: T_2=T_{1+1}=C_n^1 a^{n-1} b^1$;

…………………………………………………………………………

n-й член (T_n) получим, если $k=n-1: T_n=T_{(n-1)+1}=C_n^{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1}$;

(n+1)-й член (T_{n+1}) получим, если $k=n: T_{n+1}=C_n^n a\cdot b^n$.

4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящие от концов разложения, равны между собой.
5. Сумма биноминальных коэффициентов членов разложения равна 2^n.
6. Формула бинома Ньютона $(a-b)^n$ для всех действительных чисел a, b и для всех натуральных чисел n имеет следующий вид:

$$(a-b)^n=C_n^0 a^n-C_n^1 a^{n-1} b+C_n^2 a^{n-2} b^2+\ldots+(-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1}+(-1)^n C \tag{13}$$

$$\text{или } (a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

4.5. Обобщенная формула бинома Ньютона

Обобщенная формула бинома Ньютона дает возможность вычисления выражения вида $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$.

Утверждение. Выражение $\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)^n$, равно сумме всевозможных

слагаемых вида $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_{k!}} a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot a_k^{n_k}$, где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$,

т.е.

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)^n=\sum_{\substack{r_1\geq 0,\ldots r_k\geq 0\\ r_1+\ldots+r_k=n}}\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot a_k^{n_k} \qquad (14)$$

Тождество (14) называется *полиномиальной формулой*.

$$(a+b+c)^3=\sum\frac{3!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}a^{n_1}\cdot b^{n_2}\cdot c^{n_3}=\frac{3!}{3!\cdot 0!\cdot 0!}(a^3+b^3+c^3)+$$

$$\frac{3!}{2!\cdot 1!\cdot 0!}(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2)+\frac{3!}{1!\cdot 1!\cdot 1!}abc=a^3+b^3+c^3$$
$$3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2)+6abc$$

Практическое занятие 3.
Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов
Аудиторные задания

Задание 1. Вычислить $C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5$.

Решение. Согласно формуле бинома Ньютона, при любом x имеем равенство $(x+2)^5=C_5^0x^5+C_5^1x^42^1+C_5^2x^32^2+C_5^3x^22^3+C_5^4x^12^4+C_5^52^5$.

Полагая в нем $x=1$, получим $(1+2)^5=C_5^0+C_5^12^1+C_5^22^2+C_5^32^3+C_5^42^4+C_5^52^5$. Итак, искомая сумма равна 3^5, т.е. 243.

Задание 2. Найти 13-й член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$

Решение. Запишем общего члена бинома:

$$T_{13}=T_{12+1}=C_{15}^{12}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{12}=C_{15}^3\cdot 3\cdot 2^6=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot 2^6=87360\,.$$

Итак, $T_{13}=87360$.

Задание 3. Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x.

Решение. Для общего члена разложения бинома имеем,

$T_{k+1}=C_{16}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_{16}^k\cdot x^{\frac{16-k}{3}}\cdot x^{-k}=C_{16}^k\cdot x^{\frac{16-4k}{3}}$. Член разложения не зависит от x, это значит, что показатель степени x равен 0, т.е. $\frac{16-4k}{3}=0$, отсюда находим $k=4$.

Итак, пятый член данного разложения не зависит от x.

Задание 4. Найти пятый член разложения бинома $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$, если отношение биномиального коэффициента четвертого члена к биномиальному коэффициенту третьего члена равна 10/3.

Решение. Биномиальные коэффициенты четвертого и третьего членов разложения соответственно равны C_n^3 и C_n^2. По условию задачи $\frac{C_n^3}{C_n^2}=\frac{10}{3}$ или $3\cdot C_n^3=10\cdot C_n^2$, т.е. $3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}=10\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$, откуда $n=12$. Таким образом, показатель степени бинома $n=12$. Согласно формуле общего члена бинома, $T_5=T_{4+1}=C_{12}^4\left(\sqrt{a}\right)^8\left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^4\cdot\frac{1}{9a^2}=55a^2$.

Задание 5. В разложении $(1+x)^n$ четвертый член равен 0,96. Найти значения *x* и *n*, если сумма биномиальных коэффициентов равна 1024.

Решение. Так как сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, $1024=2^{10}$, то $n=10$. Четвертый член разложения $T_4=T_{3+1}=C_n^3x^3=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}x^3=120x^3$. Согласно условию, $120x^3=0{,}96$, откуда $x^3=0{,}008$, т.е. $x=0{,}2$.

Индивидуальные домашние задания

Вариант 1

1. Найти десятый член разложения: $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$.
2. Найти член разложения $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{10}$, не содержащий x (т.е. содержащий x в нулевой степени).
3. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в 20 раз больше чем m, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5:1?
4. В разложении бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$ найти члены, не содержащие иррациональности.

Вариант 2

1. Найти шестой член разложения $\left(y^{1/2}+x^{1/3}\right)^n$, если биномиальный коэффициент третьего от конца члена равен 45.

2. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^6$.

3. Найти 5-й член разложения бинома $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$. Если отношение биномиального коэффициента четвертого члена к биномиальному коэффициенту третьего равно 10/3.

4. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 1024. Найти член разложения $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, содержащий x в 11-ой степени.

Вариант 3

1. Найти седьмой член разложения бинома $\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{13}$.

2. Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4}\right)^n$ равна 9900. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?

3. Третье слагаемое разложения $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^m$ не содержит x. При каких x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $\left(1+x^3\right)^{30}$?

4. Найти наибольший член разложения $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$.

Вариант 4

1. Используя формулу бинома Ньютона, вычислить $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5$.

2. Найти номер члена разложения бинома $\left(x+x^{-2}\right)^{12}$, не содержащего x.

3. Найти наибольший биномиальный коэффициент разложения $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца слагаемых равно 14400.

4. Найти средний член разложения: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8$.

Вариант 5

1. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в 20 раз больше чем m, если биномиальный коэффициент четвертого слагае-

мого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5:1?

2. Найти член разложения $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$, не зависящий от x (т.е. содержащий x в нулевой степени).

3. Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить: $\left(\frac{1}{a^2}+\sqrt{a}\right)^{6}$.

4. В разложении бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$ найти члены, не содержащие иррациональности.

Вариант 6

1. Найти 13-й член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.Найти член разложения бинома $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^{-3}}\right)^n$, содержащий $x^{6,5}$, если девятый член разложения имеет наибольший коэффициент.

2. Найти 5-й член разложения бинома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$. Если отношение биномиального коэффициента третьего члена к биномиальному коэффициенту второго равно 11/2.

3. Найти наибольший член разложения $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$.

4. Вычислить сумму $C_6^0+3C_6^1+3^2C_6^2+3^3C_6^3+\mathbf{K}+3^6C_6^6$.

Вариант 7

1. Сколько рациональных членов содержится в разложении $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$

2. Найти член разложения $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{10}$, не содержащий x (т.е. содержащий x в нулевой степени).

3. Вычислить сумму $C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5$.

4. В какую натуральную степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$, чтобы отношение четвертого слагаемого к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

Вариант 8

1. Определить *n*, если пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от *x*.

2. Найти в биномиальном разложении $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$ члены, не содержащие иррациональностей.

3. В разложении $(1+x)^n$ четвертый член равен 0,96. Найти значение x и n, если сумма биномиальных коэффициентов равна 1024.

4. Найти седьмой член разложения $\left(y^{1/2}+x^{1/3}\right)^n$, если биномиальный коэффициент третьего от конца члена равен 45.

Вариант 9

1. Найти средний член разложения $\left(x^{-1/5}+x^{1/3}\right)^{10}$.

2. Найти сумму биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома $(y+x)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена на 9 больше биномиального коэффициента второго члена.

3. Биномиальные коэффициенты 2-го и 9-го членов разложения $\left(5x^{-3/2}-x^{1/3}\right)^n$ равны. Найти член разложения, не содержащий x.

4. Сколько членов разложения $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7}\right)^{36}$ являются целыми числами?

Вариант 10

1. Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x. (т.е. содержащий x в нулевой степени)

2. Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4}\right)^n$ равна 9900. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?

3. Найти седьмой член разложения бинома $\left(a^2\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}/a\right)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена равен 36.

4. В разложении бинома $\left(\sqrt{y}+1/\left(2\sqrt[4]{y}\right)\right)^n$ первые три коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Найти все его члены, в каждом из которых показатель степени основания y - есть некоторое натуральное число.

4.6. Тест для самоконтроля по теме «Бином Ньютона. Треугольник Паскаля»

1. Свойство симметричности биномиальных коэффициентов:

а) $C_n^m = C_n^{m+1}$

б) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

в) $C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$

г) $C_n^m = C_n^{n-m}$

2. Свойство сложение (Паскаля) биномиальных коэффициентов:

а) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

б) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_n^{m+2}$

в) $C_n^m + C_{n+1}^{m+1} = C_{n+1}^m$

г) $C_n^m + C_{n+1}^m = C_{n+1}^{m+1}$

3. Сумма биномиальных коэффициентов равна:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

б) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^{n-1}$

в) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = n!$

г) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 2^n$

4. Число сочетаний C_n^n равно:

а) $n-1$

б) 1

в) 0

г) n

5. Основное правило построения Треугольника Паскаля, заключается в том, что:

а) каждое число в нем является суммой двух ближайших к нему чисел этой же строки.

б) каждое число в нем является суммой двух ближайших к нему чисел предыдущей строки.

в) каждое число в нем является суммой двух ближайших к нему чисел следующей строки.

г) каждое число в нем является разностью двух ближайших к нему чисел предыдущей строки.

6. Число сочетаний C_n^1 равно:

а) 1

б) 0

в) n

г) $n - 1$

7. Число сочетаний C_n^0 равно

а) 1

б) n

в) $n-1$

г) 0

8. Формула разложения бинома Ньютона $(a+b)^n =$

а) $\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$;

б) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$;

в) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$;

г) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^n b^k$.

9. Формула разложения бинома Ньютона $(a-b)^n =$

а) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^n C_n^k a^{n-k} b^k$;

б) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^k b^{n-k}$;

в) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k a^{n-k} b^k$;

г) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k a^{n-k} b^k$.

10. Число всех членов разложения бинома Ньютона $(a+b)^n$ равно

а) $n-1$;

б) $n+1$;

в) n;

г) $2n$.

11. Формула общего k-го члена разложения бинома Ньютона $(a+b)^n$ -

а) $T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k}$;

б) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$;

в) $T_{k+1} = C_n^k a^k b^n$;

г) $T_k = C_n^k a^{n-k} b^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. — Пер. с англ. — М. : Издатель- Издательский дом «Вильямс», 2004. — 960 с.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие. – 4-е. Изд. стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 495 с.
3. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. Спб.: Союз, 1997.
4. Популярная комбинаторика. Виленкин Н.Я. М.: Наука, 1975.— 208 с
5. Сканави М. И. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы (с решениями). Книга 1. Алгебра, 1994.-528с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Трудная задача

Директору ОАО «Прогресс-аренда» Петрову Ивану Ивановичу поступило представление от заместителя директора по персоналу Степанова В.В.

Текст представления был следующий:

Прошу премировать следующих сотрудников путевками в оздоровительные учреждения городов Сочи, Крым, Кавказ, в связи с отличными показателями в работе:

1. *Счастливую Ольгу Михайловну.*
2. *Бугаеву Александру Петровну.*
3. *Смирнову Алевтину Юрьевну.*
4. *Никитина Михаила Михайловича*
5. *Слепцова Николая Ивановича.*
6. *Серикова Константина Анатольевича.*

Иван Иванович оказался весьма в затруднительном положении, людей к премированию было представлено шесть, а оплатить путевки, он мог только троим. Он начал вспоминать всех своих сотрудников. Все что он вспомнил, сводилось к следующему:

Никитин Михаил Михайлович – молодой человек лет 20-23, проработал в компании менее года, ничем себя не проявил, в кампанию ОАО «Прогресс-аренда» попал по личной просьбе главы района.

Счастливая Ольга Михайловна – главный бухгалтер предприятия, работает со дня основания ОАО «Прогресс-аренда», незаменимый сотрудник.

Бугаева Александра Петровна – личный секретарь директора, молодая девушка, отлично знает делопроизводство.

Слепцов Николай Иванович – председатель профсоюза, всегда отстаивает права трудящихся. «Может и всеобщий бунт поднять» - подумал про себя Петров.

Смирнова Алевтина Юрьевна – женщина пред пенсионного возраста, на предприятии работает уборщицей уже 10 лет, взысканий не имела, но ни когда не была награждена даже грамотой.

Кто такой Сериков Константин Анатольевич директор, к сожалению не знал.

Задача была сложная, не хотелось ни кого обидеть…

Иван Иванович проанализировав сложившуюся ситуацию, нашел выход.

Ответить на следующие вопросы. Обосновать свое решение.

1. Кого и куда он отправил?
2. Сколько вариантов пришлось бы рассмотреть директору, если он не знал каждого из своих сотрудников лично?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ СРС ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»
НА ТЕМУ: **«ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. БИНОМ НЬЮТОНА»**
ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ:
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»,
09.03.03 «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Составители:
В.М. Самохина, М.Ю. Макарова

Технический редактор *Л.В. Николаева*

Подписано в печать 06.10.2016. Формат 60x84/16.
Бумага тип. №2. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Печ. л. 2,9. Тираж 50 экз. Заказ 330.
Издательство ТИ (ф) СВФУ, 678960, г. Нерюнгри, ул. Кравченко, 16.

Отпечатано в ТИ (ф) ФГАОУ ВО «СВФУ»
г. Нерюнгри