Министерство образования и науки Российской Федерации
Технический институт (филиал) федерального государственного
автономного образовательного учреждения высшего образования
«Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
НА ТЕМУ **«ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ»**
ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ:
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»,
09.03.03 «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Нерюнгри
Издательство ТИ (ф) СВФУ
2017

Утверждено учебно-методическим советом ТИ (ф) ФГАОУ ВО «СВФУ»

Составитель:
В.М. Самохина, к.п.н., заведующий кафедрой МиИ

Рецензент:
М.Ю. Макарова, к.т.н., доцент кафедры МиИ

Подготовлено на кафедре математики и информатики

Печатается в авторской редакции

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам очного отделения при выполнении самостоятельных (домашних) работ по теории вероятности и математической статистике. Методические указания содержат теоретический материал, необходимый для овладения знаний по теме «Вариационные ряды и их числовые характеристики», решенные задачи, упражнения для самостоятельно выполнения. Методическая разработка может быть использована студентами, как в процессе усвоения лекционного материала, так и во время практических занятий. Методические указания предназначены студентам первого курса для направлений подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.03 «Прикладная информатика».

Оглавление

Методические указания

Основной формой обучения студента очного отделения является его самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, выполнение домашних индивидуальных заданий. В соответствии с учебным графиком для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.03 "Прикладная информатика предусмотрено выполнение домашних работ, выполнение СРС по теме: «Вариационные ряды и их числовые характеристики». Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач.

Домашняя работа - это промежуточный метод проверки знаний студента с целью определения конечного результата в обучении по данной теме.

Индивидуальная домашняя работа по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» призвана систематизировать знания, позволяет повторить и закрепить материал. Студент выполняет вариант индивидуальной домашней работы, номер которого совпадает с номером его фамилии в аудиторном журнале. Домашние задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и сдаются на проверку преподавателю.

Критерии оценки индивидуальной домашней работы:

Индивидуальная домашняя работа (ИДР) оценивается по бально-рейтинговой системе, максимальный бал- 5, и включает следующие критерии:

1. Качество и правильность выполненных расчетов по задачам-максимальный балл -4 баллов

- ИДР выполнена полностью, задания выполнены правильно, выполненные расчеты верны -4 баллов.
- ИДР выполнена полностью, ход решения заданий верен, имеются неточности в расчетах – 1-4 баллов.
- ИДР не выполнена – 0 баллов.

2. Своевременность выполнения – максимальный балл -1 балл

- Работа выполнена, в предусмотренные сроки – 1 балл.
- Работа сдана не вовремя – 0 баллов.

§ 1. ВЫБОРКА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Математическая статистика - это раздел прикладной математики, в котором рассматриваются методы отыскания законов и характеристик случайных величин по результатам наблюдений и экспериментов.

Основные задачи математической статистики.

1. Создание методов сбора и группировки обрабатываемого статистического материала, полученного в результате наблюдений за случайными процессами.

2. Разработка методов анализа полученных статистических данных.

3. Получение выводов по данным наблюдений.

Если исследуемая совокупность содержит большое число объектов, то обследование провести невозможно. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению. В связи с этим различают генеральную и выборочную совокупности.

- ✓ Определение: Выборочная совокупностью (выборка) - совокупность случайно отобранных объектов.
- ✓ Определение: Генеральной совокупностью называют совокупность, объектов из которых производится выборка.

Выборки подразделяют на повторные и бесповторные.

- ✓ Определение: Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.
- ✓ Определение: Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того чтобы по данным выборки можно было сделать достоверные выводы об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы выборка была репрезентативной, для этого должны быть выполнены условия:

- каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности;
- все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

1.1.Вариационные ряды

Полученные в ходе эксперимента данные представляют набор чисел, поэтому выявить закономерность их изменения (варьирования) сложно. Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины полученные данные подвергают обработке, т.е. начальным этапом является систематизация полученного материала.

✓ Определение: Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называют вариантом, а изменение этого значения варьированием.

Обозначения: варианты - x_i, частота варианта - n_i.

Если данные дискретны, то расположив их в порядке неубывания и сгруппировав их так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины будут одинаковы, получают ранжированный ряд данных:

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

При этом, объем выборки равен сумме всех частот ряда: $\sum n_i = n$

✓ Определение: Отношение частоты варианта к объему выборки называют относительной частотой.

Обозначения: w_i

Формула: $w_i = \frac{n_i}{n}$

✓ Определение: Дискретным вариационным рядом распределения называют ранжированную совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или относительными частотами w_i.

Пример 1. Проводились наблюдения над числом X оценок полученных на экзамене по математике течение часа. Получены следующие результаты: 3; 4; 3; 5; 4; 2; 2; 4; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 4; 3; 4; 3; 3; 4; 4; 2; 2; 5; 5; 4; 5; 2; 3; 4; 4; 3; 4; 5; 2; 5; 2; 4; 3; 3; 4; 2; 4; 4; 5; 4; 3; 5; 3; 5; 4; 4; 5; 4; 4; 5; 4; 5; 4; 5. Составить вариационный ряд.

Решение: X - дискретная случайная величина принимает следующие значения: 2; 3; 4; 5.

Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

w_1= 8/60 = 0,15; w_2= 12/60 = 0,2; w_3= 23/60 = 0,4, w_4= 17/60 = 0,25.

Получим дискретный вариационный ряд:

x_i	2	3	4	5
n_i	9	12	24	15
w_i	0,15	0,2	0,4	0,25

Контроль: $\sum n_i = 60$, $\sum w_i = 1$

Если случайная величина является непрерывной, то группировка наблюдаемых значений не дает нужных результатов.

В этих случаях необходимо строить интервальный вариационный ряд.

✓ Определение: Интервальным вариационным рядом называют упорядоченную совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.

Алгоритм построения интервального вариационного ряда

1. Определить количество частичных интервалов. Число интервалов k зависит из объема выборки и рассчитывается по формуле Стержеса:k = 1 + 3,32·lg n, или используя таблицу:

Объем выборки	6-25	25-40	40-60	60-100	100-200	более 200
Число интервалов	3-4	5-6	6-8	7-10	8-12	10-15

2. Определить ширину интервалов h по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

, где x_{max} и x_{min} - максимальная и минимальная варианты выборки

3. Установить для каждого интервала его верхнюю и нижнюю границы. Нижняя граница первого интервала находится по формуле:

$x_{нижн} = x_{min} - 0{,}5 \cdot h$.

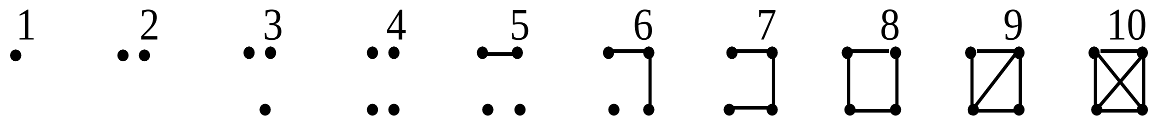
Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h: $x_{hi} = x_{hi-1} + h$.

Построение шкалы интервалов в продолжается, пока величина x_{hi} удовлетворяет соотношению: $x_{hi} < x_{max} + 0{,}5 \cdot h$.

4. Группировка результатов наблюдений. В соответствии со шкалой интервалов произвести группирование значений признака - для

каждого частичного интервала вычислить сумму частот n_i вариант, попавших в i-й интервал. При этом в интервал включают значения случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы интервала.

Подсчет частот для каждого интервала удобно проводить методом «конвертиков». Этот метод состоит в том, что попадание значения случайной величины в тот или иной интервал, отмечается точкой, и черточкой. В результате каждому десятку будет соответствовать фигура, похожая на конверт.



<u>Пример 2.</u> Даны измерения некоторого экономического показателя в 30 регионах РФ в течении года:
23 29 35 7 11 18 23 30 36 18 11 8 13 20 25 27 14 30 20 20 24 19 21 26 22 16 26 25 33 27. Составить интервальный вариационный ряд.

<u>Решение:</u> Проранжируем данные в порядке возрастания:
7 8 11 11 13 14 16 18 18 19 20 20 20 21 22 23 23 24 25 25 26 26 27 27 29 30 30 33 35 36.

1. Определим количество частичных интервалов. По формуле Стержеса:$k = 1 + 3{,}32 \cdot \lg 30 \approx 6$, таблице для n=30, получим то же значение.
2. Определим ширину интервалов: $R = x_{max} - x_{min} = 36 - 7 = 29$, $h = \frac{29}{6} \approx 4{,}8$
3. Найдем верхнюю и нижнюю границы интервалов.

Нижняя граница первого интервала $x_1 = 7 - 0{,}5 \cdot 4{,}8 = 4{,}6$, далее прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h=4,8 получаем 6 интервалов.

4. для каждого частичного интервала вычисляется сумма частот n_i вариант, попавших в i-й интервал

интервалы	4,6 - 9,4	9,4- 14,2	14,2- 19	19- 23,8	23,8- 28,6	28,6- 33,4	33,4- 38,2
частоты (n)	2	4	4	7	7	4	2

1.2. Графическое представление вариационных рядов

Для наглядного представления вариационных рядов, используется их графическое представление. Наиболее распространенными способами графического представления являются ***гистограмма, полигон частот и комулянта.***

✓ Определение: Полигоном частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i; n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (рис.1.).

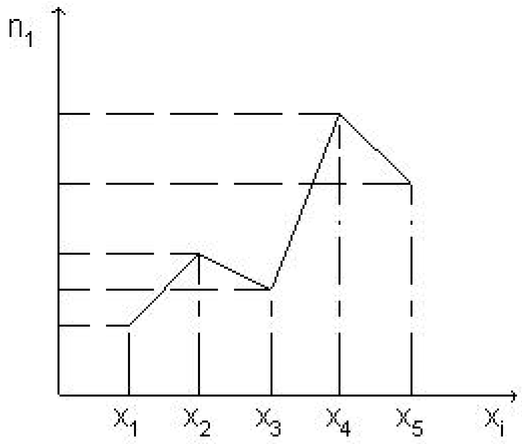


Рис. 1. Полигон частот

✓ Определение: Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; W_1)$, $(x_2; W_2)$, ..., $(x_k; W_k)$.

Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат - соответствующие им относительные частоты w_i. Точки $(x_i; w_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака строят гистограмму.

✓ Определение: Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).

✓ Определение: Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению W_i / h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии w_i / h (рис.2.).

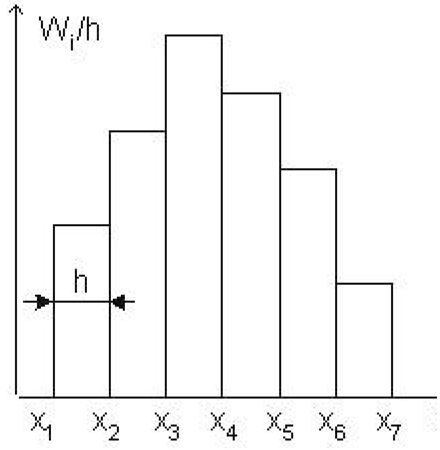


Рис. 2. Гистограмма относительных частот

Таким образом, следует, что для получения полигона частот из построенной гистограммы нужно середины вершин прямоугольников, образующих гистограмму, соединить отрезками прямых.

✓ Определение: Накопленная частота – это сумма частот данного и всех предшествующих интервалов.

✓ Определение: Кумулята - ломаная, соединяющая точки, абсциссы которых - значения вариант (серединные значения ряда), а ординаты - накопленные частоты этих значений.

Куммулята позволяет определить, какая часть совокупности обладает значениями изучаемого признака, не превышающими заданного числа, а какая часть – превышает его (рис.3.).

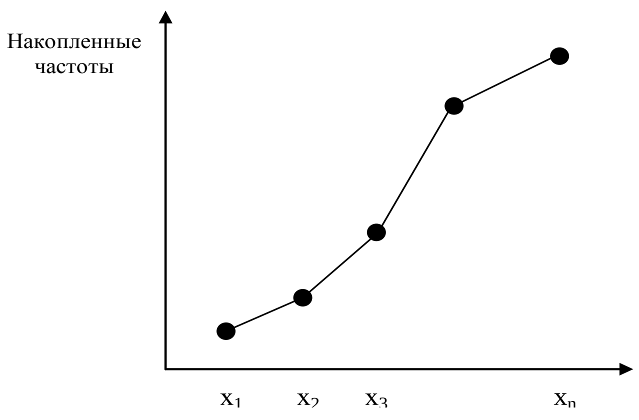


Рис. 3. Кумулята распределения

§ 2. Методы расчета сводных характеристик

Вариационные ряды и графики эмпирических распределений дают недостаточно полной характеристики выборки, поэтому находят числовые характеристики, к ним относятся: характеристики положения и характеристики рассеяния, которые дают количественное представление об эмпирических данных выборки позволяют сравнивать их между собой.

2.1. Характеристики положения

✓ Определение: **Среднее арифметическое (взвешенным средним)** – такое значение признака, сумма отклонений от которого выборочных значений признака равна нулю .

Обозначение: $\overline{x}_B$

Среднее арифметическое определяется по формуле:

$$\overline{x}_B = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i,$$

где n — объем выборки;

k — число интервалов группировки;

n_i — частота i-ого интервала;

x_i — срединное значение i-ого интервала.

✓ Определение: Медианой называется такое значение признака X, когда ровно половина значений экспериментальных данных меньше ее, а вторая половина — больше.

Обозначение: Me

Если объем выборки небольшой, то медиану можно вычислить одним из следующих способов, предварительно ранжировав выборку:

Пусть n - объем выборки.

Если $n = 2k$, то $M_e^* = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Если $n = 2k + 1$, то $M_e^* = x_{k+1}$.

Для сгруппированных данных медиана находится по формуле:

$$Me = x_{Me_h} + h_{me}\frac{0{,}5n - n_{x_{Me-1}}}{n_{Me}},$$

где x_{Me_h} - нижняя граница медианного интервала;

h_{me} - ширина медианного интервала;

$n_{x_{Me-1}}$ - накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{Me} - частота медианного интервала.

При этом вначале находят интервал группировки, в котором содержится медиана, путем подсчета накопленных частот или накопленных относительных частот.

Медианным будет тот интервал, в котором накопленная частота впервые окажется больше $\frac{n}{2}$ или накопленная относительная частота — больше 0,5.

<u>Пример 3</u>. Найти медиану для интервального ряда из примера 2.

<u>Решение:</u> Для каждого интервала найдем наколенную частоту, данные занесем в таблицу.

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
интервалы	4,6 - 9,4	9,4-14,2	14,2- 19	19- 23,8	23,8-28,6	28,6-33,4	33,4-38,2
Частоты	2	4	4	7	7	4	2
Накопленная частота	2	6	10	17	24	28	30

Найдем медианный интервал – интервал, в котором накопленная частота впервые окажется больше $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Так как, накопительная частота четвертого интервала 2+4+4+7 = 17 > 15, то следовательно интервал (19- 23,8) будет медианным и $x_{Me_h} = 19$, h_{me}=4,8, $n_{x_{Me-1}} = 10$, $n_{Me} = 7$ *(см пример 2.)*

Значит,

$$M_e = 19 + 4{,}8 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 30 - 10}{7} = 22{,}4.$$

✓ Определение: Мода представляет собой значение признака, встречающееся в выборке наиболее часто.

Обозначение: *Mo*

Ряд называется **унимодальным**, если в нем только одно модальное значение и **полимодальным**, если есть несколько значений признака, которые встречаются одинаково часто. Для полимодального ряда моду не вычисляют.

Пример 4. Найти моду выборки представленной в примере 1.

Решение: дискретный вариационный ряд имеем вид:

x_i	2	3	4	5
n_i	9	12	24	15

Наиболее часто встречающееся значение ряда является модой, поэтому $Mo = 4$.

Интервал группировки с наибольшей частотой называется модальным.

Для определения моды в интервальном ряду используется следующая формула:

$$Mo = x_{Mo_н} + h\frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})},$$

где $x_{Mo_н}$ — нижняя граница модального интервала;

h — ширина интервала группировки;

n_{Mo} — частота модального интервала;

n_{Mo-1} — частота интервала, предшествующего модальному;

n_{Mo+1} — частота интервала, следующего за модальным.

Пример 5. Найти медиану для интервального ряда

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
интервалы	4,6 - 9,4	9,4-14,2	14,2- 19	19- 23,8	23,8-28,6	28,6-33,4	33,4-38,2
Частоты	2	4	4	8	6	4	2

Решение: Найдем модальный интервал – интервал группировки с наибольшей частотой. В данном примере наибольшая частота расположена в четвертом интервале и равна 8 .

$x_{Mo_н} = 19, \; h = 4{,}8 \; n_{Mo} = 8, n_{Mo-1} = 4, n_{Mo+1} = 6$

$$Mo = 19 + 4{,}8\frac{8-4}{(8-4)+(8-6)} = 22{,}2,$$

Т.е. наиболее встречающиеся значение равно 22,2

2.2. Характеристики рассеяния

Средние значения не дают полной информации о варьирующем признаке. Часто встречаются два эмпирических распределения, у которых средние значения одинаковы, но при этом у одного из них значения признака рассеяны в узком диапазоне вокруг среднего, а у другого – в широком. Поэтому вычисляют характеристики рассеяния выборки.

✓ Определение: **Дисперсией** называется средний квадрат отклонения значений признака от среднего арифметического. Дисперсия, вычисляемая по выборочным данным, называется **выборочной дисперсией** и обозначается.

Обозначение: $$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x}_B)^2}{n}.$$

Дисперсия измеряется в единицах измерения признака в квадрате, и не совпадает с единицами измерения варьирующего признака, поэтому в практической статистике для того, чтобы охарактеризовать рассеяние признака используют обычно стандартное отклонение, а не дисперсию.

✓ Определение: **Стандартным отклонением** (средним квадратическим отклонением) называется корень квадратный из дисперсии:

Обозначение: $$\sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2}.$$

Пример 6. Найти стандартное отклонение выборки: 4, 9, 7, 4, 7, 5, 6, 3, 4, 5, 7, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 4, 3, 4.

Решение: Запишем распределение выборки в виде дискретного распределения частот:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	3	5	3	2	4	1	1

Среднее арифметическое значение равно $\overline{x}_в = 5{,}15$ ***(проверить самостоятельно).***

$$\sigma_B^2 = \frac{(2-5{,}15)^2\cdot 1+(3-5{,}15)^2\cdot 3+(4-5{,}15)^2\cdot 5+(5-5{,}15)^2\cdot 3}{20}+$$

$$+\frac{(6-5{,}15)^2\cdot 2+(7-5{,}15)^2\cdot 4+(8-5{,}15)^2\cdot 1+(9-5{,}15)^2\cdot 1}{20}=3{,}4275$$

Стандартное отклонение выражается в тех же единицах измерения, что и характеризуемый им признак. Если требуется сравнить между собой степень варьирования признаков, выраженных в разных единицах измерения, вводится относительный показатель - коэффициентом вариации.

Этот коэффициент выражается в процентном отношении и вычисляется по формуле:

$$V=\frac{\sigma_B}{\overline{\overline{x_B}}}\cdot 100\%.$$

Коэффициент вариации используется и как показатель однородности выборочных наблюдений. Если коэффициент вариации не превышает 10 %, то выборку можно считать однородной, т. е. полученной из одной генеральной совокупности.

Практически коэффициент вариации применяется в основном для сравнения выборок из однотипных генеральных совокупностей.

Среднее выборочное и выборочная дисперсия являются частным случаем более общего понятия – *момента* статистического ряда.

Определение: **Обычным эмпирическим моментом порядка k** называют среднее значение k-ых степеней разности (x_i–C):

Обозначение: $M_k^{/}=\frac{\sum n_i(x_i-C)^k}{n}$, C – произвольное постоянное число (ложный нуль).

✓ Определение: **Начальным эмпирическим моментом порядка *k*** называют обычный момент порядка *k* при C = 0.

Обозначение: $M_k=\frac{\sum n_i x_i^{\,k}}{n}$

В частности,

$$M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \overline{x_B}$$

т.е. начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней.

✓ Определение: **Центральным эмпирическим моментом порядка *k*** называют обычный момент порядка *k* при С= $\overline{x_B}$

<u>Обозначение:</u> $m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_B})^k}{n}$

В частности,

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n} = \sigma_B^2$$

т.е. центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии.

✓ Определение: *Выборочным коэффициентом асимметрии* называется число A_s^*, определяемое формулой:

<u>Обозначение:</u> $A_s^* = \frac{m_3}{\sigma_в^3}$

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда. Если полигон асимметричен, то одна из ветвей его, начиная с вершины, имеет более пологий «спуск», чем другая.

Если $A_s^* < 0$, то более пологий «спуск» полигона наблюдается слева; если $A_s^* > 0$ - справа. В первом случае асимметрию называют *левосторонней*, а во втором - *правосторонней*.

✓ Определение: Выборочным коэффициентом эксцесса или коэффициентом крутости называется число E_k^*, определяемое формулой :

<u>Обозначение:</u> $E_k^* = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3$

Выборочный коэффициент эксцесса служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением.

Коэффициент эксцесса для случайной величины, распределенной по нормальному закону, равен нулю.

Поэтому за стандартное значение выборочного коэффициента эксцесса принимают $E_k^* = 0$.

Если $E_k^* < 0$, то полигон имеет более пологую вершину по сравнению с нормальной кривой; если $E_k^* > 0$, то полигон более крутой по сравнению с нормальной кривой.

§ 3. Способы вычисления статистических характеристик вариационных рядов

При больших значениях вариантов и соответствующих им частот вычисление выборочного среднего, дисперсии и выборочных моментов приводит к громоздким вычислениям.

Для упрощения вычислений условные варианты, которые находятся по формулам: $u_i = \dfrac{x_i - c}{h}$ где

C — ложный нуль (новое начало отсчета);

h — шаг, т. е. разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами (новая единица масштаба)

Замечание 1. В качестве ложного нуля можно принять любую варианту Максимальная простота вычислений достигается, если выбрать в качестве ложного нуля варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда (часто такая варианта имеет наибольшую частоту)

Замечание 2. Варианте, которая принята в качестве ложного нуля, соответствует условная варианта, равная нулю

3.1.Метод произведения

✓ Определение *Равностоящими* называют варианты, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью h.

Пусть выборка дана в виде распределения равноотстоящих вариант и соответствующим им частот, тогда числовые характеристики выборки вычисляются по формулам:

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c; \qquad D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right)\cdot h^2; \qquad \sigma_в = \sqrt{D_в};$$

$$A_s^* = \frac{m_3}{\sigma_в^3}; \qquad E_k^* = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3,$$

Условные моменты:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i n_i, \qquad M_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i,$$

$$M_3^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i, \qquad M_4^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i.$$

$$m_3 = \left(M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right)\cdot h^3,$$

$$m_4 = \left(M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^*\right)^4\right)\cdot h^4.$$

Для вычисления числовых характеристик выборки методом произведений целесообразно составить расчетную таблицу:

u_i	n_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$u_i^3 n_i$	$u_i^4 n_i$	$(u_i+1)^4 n_i$
u_1	n_1					
$\vdots$	$\vdots$					
u_m	n_m					
	$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$	$\sum_{i=1}^{m} u_i n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} (u_i+1)^4 n_i$

Для контроля вычислений используют тождество:

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i+1)^4 n_i = \sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i + 6\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i n_i + n$$

Пример 7. Результаты измерений отклонений от нормы диаметров 50 подшипников приведены в таблице.

-1,760	-0,291	-0,110	-0,450	0,512
-0,158	1,701	0,634	0,720	0,490
1,531	-0,433	1,409	1,740	-0,266
-0,058	0,248	-0,095	-1,488	-0,361
0,415	-1,382	0,129	-0,361	-0,087
-0,329	0,086	0,130	-0,244	-0,882
0,318	-1,087	0,899	1,028	-1,304
0,349	-0,293	0,105	-0,056	0,757
-0,059	-0,539	-0,078	0,229	0,194
0,123	0,318	0,367	-0,992	0,529

Вычислить числовые характеристики выборки.

Решение: Построим интервальный ряд.

Определим количество интервалов $k \approx 1 + 3{,}322 \lg 50 \approx 7$.

Для определения ширины интервалов h используем формулу Стерджеса:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322\, lg\, 50} = \frac{1{,}74 - (-1{,}76)}{1 + 3{,}322\, lg\, 50} \approx \frac{3{,}5}{1 + 3{,}322\, lg\, 50} \approx \frac{3{,}5}{6{,}644} \approx 0{,}526$$

Примем h =0,6 , $m = 7$.

За начало первого интервала примем величину:

$$x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2} = -1{,}76 - 0{,}3 = -2{,}06$$

Середины интервалов	-1,76	-1,16	-0,56	0,04	0,64	1,24	1,84
Интервалы	$[-2{,}06; -1{,}46)$	$-1{,}46; -0{,}86$	$[-0{,}86; -0{,}26)$	$[-0{,}26;\ 0{,}34)$	$[0{,}34;\ 0{,}94)$	$[0{,}94; 1{,}54)$	$[1{,}54; 2{,}14)$
Подсчет частот							
Частоты n_i	2	6	11	15	11	3	2

В качестве вариантов x_i возьмем середины интервалов. Перейдем к условным вариантам.

Составим расчетную таблицу:

1. Варианты запишем в первый столбец.
2. Частоты запишем во второй столбец; сумму частот (50) поместим в нижнюю клетку столбца;
3. Рассчитаем условные варианты, при этом, в качестве ложного нуля C выберем варианту ($0{,}04$**),** имеющую наибольшую частоту (15).
4. Далее рассчитываем произведения $u_i \cdot n_i$, $u_i^2 \cdot n_i$, $u_i^3 \cdot n_i$, $u_i^4 \cdot n_i$, $(u_i+1)^4 \cdot n_i$, записываем их в соответствующие столбцы и их суммы записываем в последней столбец.

x_i	n_i	u_i	$u_i \cdot n_i$	$u_i^2 \cdot n_i$	$u_i^3 \cdot n_i$	$u_i^4 \cdot n_i$	$(u_i+1)^4 \cdot n_i$
-1,76	2	-3	-6	18	-54	162	**32**
-1,16	6	-2	-12	24	-48	96	**6**
-0,56	11	-1	-11	11	-11	11	**0**
0,04	**15**	0	0	0	0	0	**15**
0,64	11	1	11	11	11	11	**176**
1,24	3	2	6	12	24	48	**243**
1,84	2	3	6	18	54	162	**512**
$\sum$	**50**		**-6**	**94**	**-24**	**490**	**984**

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{m}(u_i+1)^4 n_i = \sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i + 6\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i n_i + n =$$

$$= 490 + 4\cdot(-24) + 6\cdot 94 + 4\cdot(-6) + 50 = 984.$$ Расчеты проведены верно.

Используя полученные данные, найдем условные моменты:

$$M_1^* = -\frac{6}{50} = -0{,}12, \qquad M_2^* = \frac{94}{50} = 1{,}88,$$

$$M_3^* = -\frac{24}{50} = -0{,}48, \qquad M_4^* = \frac{490}{50} = 9{,}8.$$

Находим числовые характеристики выборки:

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c = -0{,}12 \cdot 0{,}6 + 0{,}04 = -0{,}032$$

$$D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2 \right) \cdot h^2 = \left(1{,}88 - (-0{,}12)^2\right) \cdot 0{,}6^2 = 0{,}6716$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{0{,}672} = 0{,}8195$$

Вычислим центральные моменты третьего и четвертого порядка:

$$m_3 = \left(M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right) \cdot h^3 =$$

$$= \left(-0{,}48 - 3 \cdot (-0{,}12) \cdot 1{,}88 + 2(-0{,}12)^3\right) \cdot 0{,}6^3 = 0{,}0418$$

$$m_4 = \left(M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^*\right)^4\right) \cdot h^4 =$$

$$= \left(9{,}8 - 4 \cdot (-0{,}12) \cdot (-0{,}48) + 6(-0{,}12)^2 \cdot 1{,}88 - 3(-0{,}12)^4\right) \cdot 0{,}6^4 = 1{,}2127$$

Вычислим выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$A_s^* = \frac{m_3}{\sigma_в^3} = \frac{0{,}0418}{0{,}8195^3} = 0{,}0759 \qquad E_k^* = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3 = \frac{1{,}2127}{0{,}8195^4} - 3 = -0{,}3112$$

.

Если первоначальные варианты являются неравностоящими, то интервал, в котором заключены все варианты выборки, делят на несколько равных, длины h, частичных интервалов (каждый частичный интервал должен содержать не менее 8-10 вариант). Затем находят середины частичных интервалов, которые образуют последовательность равностоящих вариант. В качестве частоты каждой середины интервала принимают сумму частот вариант, которые попали в соответствующий частичный интервал.

При вычислении выборочной дисперсии для уменьшения ошибки, вызванной группировкой (особенно при малом числе интервалов), делают поправку Шеппарда:

$$D_B^* = D_B - \frac{1}{12} h^2$$

Пример 8. Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема n=50:

x_i	2	3	7	9	11	12	16	25	26
n_i	2	5	3	8	6	5	8	7	6

Решение. Все значения находятся в интервале (2-26). Разобьем данный интервал на четыре частичных интервала длины h=6.

x_i	2-8	8-14	14-20	20-26
n_i	10	19	8	13

Приняв середины частичных интервалов в качестве новых вариант y_i , получим равноотстоящие варианты: y_1 =5, y_2 =11 y_3 =17, y_4 =23.

В качестве частоты n_1 варианты y_1 =5 примем сумму частот вариант, попавших в первый интервал: n_1=2+5=3=10 .

Вычислим аналогично частоты остальных вариант, получим распределение равноотстоящих вариант:

x_i	5	11	17	23
n_i	10	19	8	13

Составим расчетную таблицу

x_i	n_i	u_i	$u_i \cdot n_i$	$u_i^2 \cdot n_i$	$u_i^3 \cdot n_i$	$u_i^4 \cdot n_i$	$(u_i+1)^4 \cdot n_i$
5	10	-1	-10	10	-10	10	0
11	19	0	0	0	0	0	19
17	8	1	8	8	8	8	128
23	**13**	2	26	52	104	208	1053
$\sum$	**50**		24	**70**	**102**	**226**	**1200**

С помощью сумм, полученных в нижней строке таблицы, находим условные моменты:

$$M_1^* = \frac{24}{50} = 0{,}48, \qquad M_2^* = \frac{70}{50} = 1{,}4,$$

Вычислим числовые характеристики выборки:

$$\overline{y_в} = 0{,}48 \cdot 6 + 11 = 13{,}88; \quad D_в = (1{,}4 - (0{,}48))^2 \cdot 6^2 = 42{,}1056;$$

учтем поправку Шеппарда:

$$D_B^* = 42{,}1056 - \frac{6^2}{12} = 39{,}1056$$

3.2. Метод сумм

При использовании метода сумм условные моменты находят по формулам:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}, \qquad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n},$$

$$M_3^* = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{n}, \qquad M_4^* = \frac{s_1 + 14s_2 + 36s_3 + 24s_4}{n}$$

где $d_1 = a_1 - b_1$, $s_1 = a_1 + b_1$, $s_2 = a_2 + b_2$.

Центральные эмпирические моменты по формулам:

$$m_3 = \left(M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right) \cdot h^3,$$

$$m_4 = \left(M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^*\right)^4\right) \cdot h^4.$$

Пример 9. Найти методом сумм выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению из примера 7.

Решение. Составим расчетную таблицу:

1) запишем варианты в первый столбец;

2) запишем частоты во второй столбец; сумму частот (50) поместим в нижнюю клетку столбца;

3) в качестве ложного нуля С выберем варианту (0,04), которая имеет наибольшую частоту (15); в клетках строки, содержащей ложный нуль, запишем нули; в четвертом столбце над и под уже помещенным нулем запишем еще по одному нулю;

4) в оставшихся незаполненными над нулем клетках третьего столбца (исключая самую верхнюю) запишем последовательно накопленные частоты: 2; 2+6=8; 8+11=19; сложив все накопленные частоты, получим число $b_1 = 29$, которое поместим в верхнюю клетку третьего столбца. В оставшихся незаполненными под нулем клетках третьего столбца (исключая самую нижнюю) запишем последовательно накопленные частоты: 2; 2+3=5; 5+11=16; сложив все накопленные частоты, получим число $a_1 = 23$, которое поместим в нижнюю клетку третьего столбца;

5) аналогично заполняется четвертый столбец.

1	**2**	3	4	5	6
x_i	n_i	$b_1 = 29$	$b_2 = 12$	$b_3 = 2$	$b_4 = 0$
-1,76	2	2	2	2	0
-1,16	6	8	10	0	0
-0,56	11	19	0	0	0
0,04	**15**	0	0	0	0
0,64	11	16	0	0	0
1,24	3	5	7	0	0
1,84	2	2	2	2	0
$\sum$	**50**	$a_1 = 23$	$a_2 = 9$	$a_3 = 2$	$a_4 = 0$

Тогда, $d_1 = a_1 - b_1 = 23 - 29 = -6$,

$d_2 = a_2 - b_2 = 9 - 12 = -3$

$d_3 = a_3 - b_3 = 2 - 2 = 0$

$s_1 = a_1 + b_1 = 23 + 29 = 52$,

$s_2 = a_2 + b_2 = 12 + 9 = 21$.

$s_3 = a_3 + b_3 = 2 + 2 = 4$

$s_4 = a_4 + b_4 = 0$

Найдем условные моменты:

$M_1^* = \frac{-6}{50} = -0{,}12$, $\quad M_2^* = \frac{52 + 2 \cdot 21}{50} = 1{,}88$

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c = -0{,}12 \cdot 0{,}6 + 0{,}04 = -0{,}032$$

$$D_в = \left(1{,}88 - (-0{,}12)^2\right) \cdot 0{,}6^2 = 0{,}6716$$

$$M_3^* = \frac{-6 + 6 \cdot (-3) + 6 \cdot 0}{50} = -0{,}48,$$

$$M_4^* = \frac{52 + 14 \cdot 21 + 36 \cdot 4 + 24 \cdot 0}{50} = 9{,}8$$

Вычислим центральные моменты третьего и четвертого порядка:

$$m_3 = \left(M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right) \cdot h^3 =$$

$$= \left(-0{,}48 - 3\cdot(-0{,}12)\cdot 1{,}88 + 2(-0{,}12)^3\right)\cdot 0{,}6^3 = 0{,}0418$$

$$m_4 = \left(M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^*\right)^4\right)\cdot h^4 =$$

$$= \left(9{,}8 - 4\cdot(-0{,}12)\cdot(-0{,}48) + 6(-0{,}12)^2\cdot 1{,}88 - 3(-0{,}12)^4\right)\cdot 0{,}6^4 = 1{,}2127$$

Вычислим выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$A_s^* = \frac{m_3}{\sigma_в^3} = \frac{0{,}0418}{0{,}8195^3} = 0{,}0759 \qquad E_k^* = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3 = \frac{1{,}2127}{0{,}8195^4} - 3 = -0{,}3112$$

.

§ 4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

По исходным данным:

1. Постройте интервальный ряд распределения.
2. Рассчитайте для него числовые характеристики: выборочное среднее, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, моду, медиану.
3. Для полученного ряда распределения постройте графики: полигон и кумулятивную кривую. Графически определите значение моды и медианы.
4. Постройте гистограмму и графически определите значение моды.
5. Рассчитайте для него числовые характеристики методом произведений.
6. Рассчитайте для него числовые характеристики методом сумм.
7. Сравните полученные результаты.

№ 1. Произведено обследование величины вклада (в руб.) на 1 января текущего года в банке по 100 лицевым вкладам. Результаты обследования приведены в следующей таблице:

530	570	660	701	700	670	825	780	700	600
665	785	840	805	820	818	900	860	830	840
797	785	550	900	760	660	650	910	905	640
760	810	850	820	885	850	873	773	870	880
775	950	970	860	100	682	100	574	105	980
760	930	955	960	740	100	608	122	708	119
580	695	530	600	881	119	821	699	120	600
828	817	800	819	943	883	595	890	880	885
118	840	123	120	700	953	110	788	900	860
800	104	100	767	969	116	700	121	997	900

№ 2. В таблице приведены транспортные затраты (в руб. за тонну) на доставку продукции предприятия к потребителям:

2,01	2,88	3,05	2,66	2,36	2,24	2,71	2,08	2,78
2,02	3,15	3,28	3,54	2,22	2.62	2,84	2,36	3,39
2,22	2,49	2,71	2,67	2,78	2,18	2,36	2,38	2,54
3,41	2,72	2,75	2,55	2,71	2,51	2,82	1,99	2,79
3,43	3,29	3,20	3,09	3,02	2,78	2,67	2,71	2,88
2,61	2,72	2,63	2,68	2,75	3,11	3,14	3,09	3,35
2,69	2,12	2,14	2,57	2,76	2,59	2,15	2,41	2,36
2,32	3,13	2,67	3,08	2,71	2,92	2,12	2,25	2,68
2,79	2,99	2,65	2,96	2,58	3,06	2,06	2,76	2,61
2,92	2,62	2,38	2,56	2,51	3,24	1,98	2,56	2,85

№ 3. Известны удельные затраты на производство товарной продукции (руб./шт.) по ста предприятиям отрасли. Результаты обследования приведены в следующей таблице:

3,61	4,06	4,28	4,01	4,28	4,28	4,02	4,26	4,27	4,15
3,72	4,27	4,27	5,02	4,45	5,09	3,38	5,05	4,45	4,29
3,85	4,08	4,44	4,08	3,83	4,08	4,19	4,01	3,67	3,82
4,19	4,36	4,26	4,25	4,46	4,42	4,31	4,36	4,38	4,36
4,55	4,55	4,31	4,49	4,24	4,49	4,60	4,65	4,72	4,62
4,98	4,29	4,38	4,34	4,29	3,86	4,68	5,08	3,78	4,29
4,06	4,32	3,85	4,28	5,08	4,14	4,05	4,67	4,05	4,28
4,87	4,95	4,87	4,77	4,29	4,72	3,79	4,24	4,29	4,51
4,57	4,57	4,36	4,82	4,47	4,81	4,54	4,72	4,44	4,30
4,28	4,26	4,15	4,06	5,18	4,39	4,87	3,88	4,25	3,90

№ 4. Проведено выборочное обследование месячного бюджета 100 семей за месяц. Результаты обследования приведены в таблице:

230	270	275	357	400	260	287	370	361	371
385	310	448	445	470	423	490	409	400	410
378	480	240	436	321	245	330	250	250	340
350	340	392	290	375	350	600	350	350	289
445	400	400	367	460	392	360	365	450	368
355	450	450	450	350	468	470	495	500	450
225	300	343	285	381	300	295	385	342	297
370	380	350	415	400	390	387	376	500	357
375	391	412	440	410	600	700	400	500	550
337	345	430	258	610	328	560	540	348	390

№ 5. В таблице проведены результаты обследования среднемесячной заработотной платы 100 рабочих одного предприятия:

200	271	295	225	268	245	275	248	250	270
310	315	345	350	270	270	295	360	300	285
270	260	210	274	300	275	300	260	260	260
298	281	284	291	280	235	230	289	240	280
300	290	289	292	360	300	365	290	330	290
327	295	250	337	249	350	271	298	300	345
238	235	248	273	237	256	255	238	220	220
300	275	315	300	300	261	265	262	273	355
325	335	320	300	310	310	300	330	268	300
280	340	280	260	320	345	350	279	258	260

№ 6. В таблице приведены данные об урожайности ржи (в ц /га) по ста участкам одного колхоза:

9,2	12,0	15,3	20,8	15,2	15,6	13,7	15,2	15,5	12,8
12,8	20,4	18,0	9,0	20,0	20,0	18,0	20,5	18,0	15,6
15,0	21,8	22,5	28,7	24,0	24,0	22,5	21,7	23,8	16,0
17,2	16,2	15,7	17,3	11,1	16,1	14,1	20,3	18,2	19,7
21,0	11,2	20,8	19,7	15,2	15,5	18,5	18,4	19,4	21,0
20,3	17,8	20,2	21,0	26,5	10,0	20,4	11,2	12,0	21,0
13,5	14,0	14,6	19,1	15,0	13,2	17,3	18,6	14,8	13,0
21,0	20,0	19,8	20,0	18,0	15,6	17,9	21,0	16,7	24,5
20,5	19,5	18,8	24,5	18,5	19,0	25,5	25,0	17,2	17,4
20,8	12,0	18,3	17,0	18,4	22,0	26,5	26,0	24,8	17,9

№ 7. В таблице приведены данные об урожайности пшеницы (в ц/ га) по участкам совхоза:

32,0	33,2	38,1	36,5	34,2	38,0	33,5	36,8	36,0	37,5
34,5	39,7	39,3	40,0	39,5	38,8	38,2	39,5	39,3	40,0
37,0	37,5	32,5	40,1	38,9	40,5	41,2	41,0	40,0	37,0
36,5	36,0	36,7	38,2	37,5	40,0	38,0	40,0	38,0	39,2
39,8	38,8	40,0	41,0	40,0	40,5	41,8	40,9	40,5	45,8
39,2	39,1	39,3	45,0	41,2	32,8	42,0	33,0	42,0	34,0
34,8	35,0	38,0	39,0	38,0	36,8	39,6	46,0	34,8	37,8
39,3	40,0	38,2	42,8	38,7	46,0	42,0	40,0	41,6	41,7
43,0	42,5	39,0	36,0	39,0	43,0	44,0	42,0	44,5	44,8
36,0	39,9	42,8	40,0	44,0	43,5	35,7	37,2	45,0	39,3

№ 8. Результаты обследования стажа работы 100 сотрудников одного предприятия приведены в следующей таблице:

2,5	5,5	6,0	6,5	7,2	9,3	10,8	7,7	9,4	9,8
10,0	11,0	11,0	10,9	10,4	10,6	10,6	10,5	12,6	10,4
12,2	7,2	3,0	7,4	4,8	9,5	14,8	7,9	12,8	13,2
9,6	10,9	11,1	9,3	9,0	11,3	11,5	13,0	4,5	13,5
12,4	11,5	11,4	12,8	11,2	13,0	13,8	12,9	13,7	14,1
10,2	9,6	12,2	11,8	4,5	14,5	5,1	16,0	5,1	14,7
5,4	8,5	5,3	7,7	6,2	6,7	7,1	7,1	8,2	8,5
10,0	11,8	10,1	11,3	10,1	10,2	10,5	10,3	10,5	13,1
10,4	10,7	11,2	9,8	11,0	10,1	11,5	12,5	10,6	14,7
7,0	12,1	7,1	12,1	8,5	17,2	11,8	8,6	8,8	15,7

№ 9. В таблице приведены данные о среднемесячных товарных запасах ста торговых предприятий района на 1 января текущего года:

36,2	41,1	42,5	40,1	42,1	42,9	40,2	42,8	42,7	42,2
37,5	42,9	42,9	49,8	44,2	50,8	36,8	51,6	44,2	43,5
39,1	40,8	44,6	40,9	38,8	40,6	44,6	39,2	36,3	38,4
42,2	44,2	41,8	42,8	42,6	43,5	42,4	43,6	43,5	44,2
45,9	45,6	43,1	44,5	43,1	45,1	45,2	46,3	46,2	47,1
50,2	42,8	44,2	44,4	51,1	39,2	47,2	51,2	38,1	43,0
40,9	43,1	39,8	42,6	44,6	42,4	41,3	47,4	41,2	44,6
48,8	49,6	47,6	47,8	52,2	48,2	38,5	43,2	43,4	44,8
45,9	46,2	42,8	48,6	43,5	48,1	46,6	47,5	45,8	42,7
43,0	42,4	41,9	40,3	42,8	44,3	48,2	39,1	43,9	47,6

№ 10. В таблице приведены результаты роста ста студентов I курса одного из институтов:

145	167	161	163	158	160	167	152	166	160
170	169	170	170	164	147	151	166	151	170
185	147	167	148	168	166	152	146	153	170
157	158	182	159	159	181	169	162	157	156
171	170	167	166	169	168	167	170	173	157
182	172	172	173	184	173	174	174	164	163
158	153	160	154	165	151	155	164	169	155
169	169	169	168	172	172	173	169	166	169
178	179	176	176	173	175	175	179	167	168
179	180	178	159	175	158	175	159	181	166

№ 11. В таблице приведены средние баллы аттестатов ста абитуриентов, подавших документы в один из вузов:

3,59	4,01	4,27	4,01	4,50	4,57	4,34	4,36	4,27	4,15
3,72	4,25	4,32	5,00	4,29	5,00	5,00	4,57	4,55	4,27
3,91	4,09	4,47	4,12	3,99	4,15	4,00	3,75	3,65	3,75
4,25	4,35	4,18	4,28	4,42	4,49	4,44	4,35	4,15	4,28
4,62	4,55	4,26	4,53	4,32	4,56	3,42	4,70	4,67	4,62
5,00	4,25	5,45	5,42	4,30	3,98	4,73	3,45	3,76	4,12
4,15	4,30	4,02	4,28	5,00	4,27	5,00	4,02	4,09	4,65
4,85	5,00	4,90	4,80	4,56	4,85	4,75	4,31	4,28	4,39
4,61	4,65	4,32	4,95	5,00	4,80	4,32	4,50	4,45	4,28
4,29	4,28	4,28	4,21	4,32	4,46	3,42	4,29	4,22	3,92

№ 12. В таблице приведена численность специалистов с высшим и средним образованием по ста предприятиям одной из республик:

20	55	88	72	65	85	74	88	69	72
125	99	92	85	97	91	98	100	120	119
50	47	45	88	29	95	30	145	25	40
118	76	105	62	99	75	99	68	79	78
120	116	109	125	131	120	122	120	117	125
69	110	98	99	98	138	125	135	98	60
75	62	108	58	105	99	81	70	80	155
77	80	115	85	89	160	115	97	95	90
120	121	128	77	138	155	139	47	147	52
100	37	131	60	160	38	155	98	96	124

№ 13. Жилищные фонды 100 поселков городского типа одного из районов характеризуются следующими данными:

42,0	43,2	48,1	46,5	44,2	47,7	43,5	46,8	45,9	47,5
44,5	49,7	49,3	49,8	49,5	48,8	48,2	49,5	49,3	50,0
47,0	47,5	42,5	50,0	48,9	50,5	51,2	51,1	49,8	47,0
46,5	46,0	46,7	47,9	47,5	49,8	48,0	50,0	47,6	49,2
49,8	48,8	49,8	50,8	49,9	50,5	51,8	50,9	50,5	55,8
49,2	49,1	49,3	49,9	51,2	42,8	51,9	42,8	52,0	44,0
44,8	45,2	48,0	44,8	47,6	46,8	49,6	55,7	44,8	47,8
49,3	50,1	48,2	49,2	48,7	56,2	51,8	49,8	51,6	51,7
53,1	52,5	48,7	52,8	49,1	53,1	53,9	52,2	54,5	54,8
46,2	49,9	52,8	46,1	53,8	53,5	45,7	47,2	55,0	49,8

№ 14. Имеются данные о возрасте ста сотрудников одного из предриятий по состоянию на 1 января текущего года:

20	27	30	23	27	25	27	28	25	25
31	32	35	35	27	27	28	30	36	30
27	26	21	27	30	28	26	30	26	26
30	28	29	29	28	24	28	23	29	24
30	29	28	29	36	30	29	37	29	33
33	30	25	34	25	35	34	27	30	30
23	24	25	27	24	26	22	26	23	22
30	28	32	30	30	26	35	27	26	27
32	34	32	30	31	31	30	30	33	27
28	34	28	26	32	35	26	35	28	26

№ 15. В таблице приведены данные о выполнении плана за месяц (тыс. руб.) по ста строительно-монтажным управлениям одного из районов:

128	121	163	90	152	156	137	152	155	128
150	204	162	208	203	200	180	205	180	156
172	218	286	237	240	240	225	217	238	160
210	162	157	173	111	161	141	203	182	197
203	112	206	197	152	155	185	184	194	210
135	178	202	211	285	100	204	112	120	210
210	142	146	191	150	132	173	186	148	130
205	201	198	200	180	156	179	210	167	245
208	195	188	245	185	190	255	250	172	174
92	121	163	176	184	270	265	260	248	179

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Изд. 6–е доп. – М.: Высш.шк., 2002.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов вузов. Изд. 6–е, доп. – М.: Высш. шк., 2002.

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. – М.: Наука, 1988.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
НА ТЕМУ **«ВАРИАЦИОННЫЕ РЯДЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ»**
ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ:
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»,
09.03.03 «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Составитель:
В.М. Самохина

Технический редактор *Л.В. Николаева*

Подписано в печать 11.04.2017. Формат 60x84/16.
Бумага тип. №2. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Печ. л. 2. Тираж 50 экз. Заказ 341.
Издательство ТИ (ф) СВФУ, 678960, г. Нерюнгри, ул. Кравченко, 16.

Отпечатано в ТИ (ф) ФГАОУ ВО «СВФУ»
г. Нерюнгри