Министерство образования и науки Российской Федерации
Технический институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
НА ТЕМУ «СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»,
09.03.03 «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Нерюнгри
Издательство ТИ (ф) СВФУ
2016

Утверждено учебно-методическим советом ТИ (ф) ФГАОУ ВО «СВФУ»

Составители:
В.М. Самохина, к.п.н., заведующая кафедрой МиИ;
М.Ю. Макарова, к.т.н., доцент кафедры МиИ

Рецензент:
С.В. Трофименко, д.г.-м.н., профессор кафедры МиИ

Подготовлено на кафедре математики и информатики

Печатается в авторской редакции

Методическое указание предназначено для оказания помощи студентам очного отделения при выполнении расчетно-графической работы по теории вероятностей и математической статистике. Пособие содержит теоретический материал, необходимый для овладения знаниями по теме «Системы двух случайных величин», решенные задачи, упражнения для самостоятельного выполнения и варианты для расчетно-графической работы. Методическая разработка может быть использована студентами, как в процессе усвоения лекционного материала, так и во время практических занятий. Методические указания предназначены для студентов второго курса для направлений подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.03 «Прикладная информатика».

Оглавление

Методические указания

Основной формой обучения студента очного отделения является его самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, ответы на вопросы для самопроверки, выполнение индивидуальных заданий. В соответствии с учебным графиком для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.03 «Прикладная информатика» предусмотрено выполнение расчетно-графической работы на тему: «Системы двух случайных величин». Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач.

При изучении данного раздела не возникнет трудностей, если предыдущие темы хорошо усвоены. Для двумерных случайных величин вводятся понятия, аналогичные соответствующим понятиям для одномерных случайных величин. Однако появляются и новые понятия, такие как зависимость случайных величин, условные распределения, ковариация, корреляция и др. В разделе 6 сформулированы теоретические вопросы, которые помогут подготовиться к выполнению индивидуальных заданий. Приступать к решению задач желательно только в том случае, если ответы на вопросы не вызвали затруднений.

Студент выполняет вариант индивидуального задания, номер которого совпадает с номером его фамилии в аудиторном журнале. Индивидуальные задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и сдаются на проверку преподавателю. При оформлении индивидуального задания необходимо соблюдать следующие требования:

1. Титульный лист должен быть оформлен правильно. Образец оформления, представлен в приложении.
2. Обязательно прилагается список использованной литературы. В этот список необходимо включить рабочую программу и методические указания, в соответствии с которыми выполнены задания.
3. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания. Перед решением следует записать текст условия задачи.
4. Решения всех задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.

При необходимости студент должен давать пояснения по всем или некоторым задачам индивидуального задания.

5. В случае не соответствия работы требованиям к оформлению и/или неверному выполнению заданий преподаватель возвращает работу студенту на доработку. В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена на проверку преподавателю.

6. Студент, не выполнивший хотя бы одно задание, не допускается к сдаче зачета по данной дисциплине.

7. Перед выполнением индивидуального занятия студент должен ознакомиться с литературой, рекомендуемой по данному разделу дисциплины.

8. Студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения консультации.

1. *Закон распределения двумерной случайной величины*

Если возможное значение случайной величины определяется одним числом, то она называется одномерной.

Кроме одномерных случайных величин изучают величины, возможные значения которых определяются двумя, тремя, …, **n** числами. Такие величины называются соответственно двумерными, трехмерными, . . ., **n**-мерными.

<u>Определение:</u> Двумерной называют случайную величину (X,Y), возможные значения которой есть пары чисел (x,y). Каждую из величин *X* и *Y* называют составляющей (компонентой). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно образуют систему двух случайных величин.

На рисунке 1 представлено совместное распределение двумерной случайной величины (*X*; *Y*), где индивидуумы сгруппированы в соответствии с их весом и ростом.

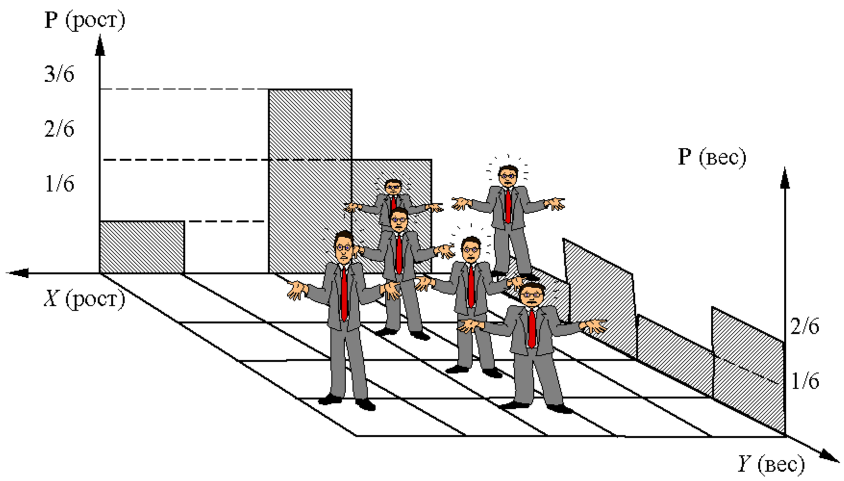


Рис. 1. Совместное распределение двумерной случайной величины (вес, рост)

Систему двух случайных величин (*X,Y*) можно изображать случайной точкой на плоскости XOY.

<u>Определение:</u> Законом распределения вероятностей двумерной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Если составляющие *X* и *Y* – дискретные случайные величины, то (X,Y) - дискретная двумерная случайная величина, а если *X* и *Y* – непрерывные, то (X,Y) - непрерывная двумерная случайная величина.

Закон распределения <u>дискретной двумерной случайной величины</u> может быть задан:

1) *Таблицей совместного распределения*, где в пересечении строки $X = x_i$ и столбца $Y = y_j$ находится вероятность $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i, j = 1,2,\dots$

	y_1	y_2	…	y_n	…
x_1	$\mathbf{p}_{11}$	$\mathbf{p}_{12}$	…	$\mathbf{p}_{1n}$	…
x_2	$\mathbf{p}_{21}$	$\mathbf{p}_{22}$	…	$\mathbf{p}_{2n}$	…
…	…	…	…	…	…
x_m	$\mathbf{p}_{m1}$	$\mathbf{p}_{m2}$	…	$\mathbf{p}_{mn}$	…

Так как события $\{(X = x_i)(Y = y_j)\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, составляют полную группу попарно несовместных событий, то сумма вероятностей равна 1, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

2) *Функцией распределения вероятности* двумерной случайной величины.

Функция распределения наиболее универсальная форма закона распределения двумерных случайных величин как дискретных, так и непрерывных.

Определение: Функцией распределения вероятности двумерной случайной величины называют функцию $F(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел (x,y) вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y: $F(x,y) = P(X < x, Y < y)$.

Геометрически функция $F(x,y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрат с вершиной в точке $M(x,y)$ (рис.2).

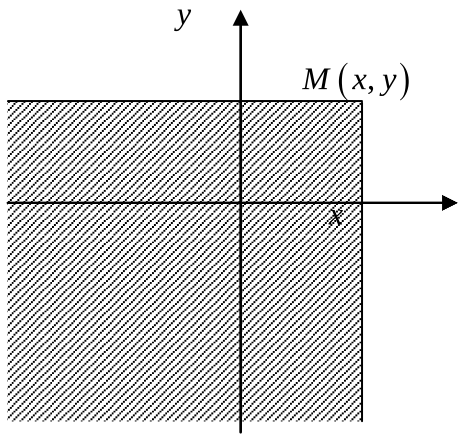


Рис.2. Геометрическое изображение функции $F(x,y)$

Свойства функции распределения $F(x,y)$.

1. $0 \le F(x, y) \le 1$. Вытекает из определения функции *F*(*x*,*y*) как вероятности.

2. Функция $F(x, y)$ - неубывающая функция по каждому аргументу.

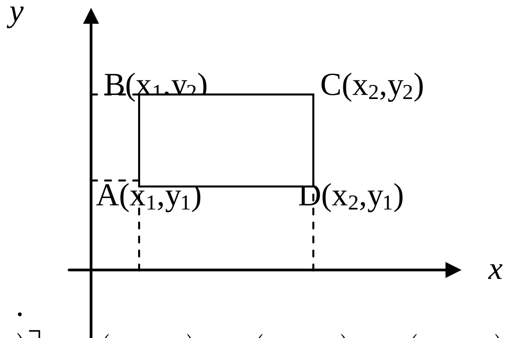
3. Имеют место предельные соотношения:

$F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$; $F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.

При $y = +\infty$ функция распределения системы становится равной функции распределения составляющей *X*, т.е. $F(x, +\infty) = F_1(x)$.

Аналогично, $F(+\infty, y) = F_2(y)$.

Зная $F(x, y)$, можно найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в пределы прямоугольника ABCD



$$P\left[(x_1 \le X < x_2)(y_1 \le Y < y_2)\right] = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

<u>Определение:</u> Плотностью совместного распределения вероятностей (двумерной плотностью вероятности) <u>двумерной непрерывной</u> случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y)$$

Геометрическая плотность вероятности $\varphi(x, y)$ представляет собой поверхность распределения в пространстве $OXYZ$.

Свойства двумерной плотности вероятности:

1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна: $\varphi(x, y) \ge 0$

2. Двойной нсобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности вероятности равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) = 1$

3. Функция распределения $F(x, y)$ может быть выражена через $\varphi(x, y)$ по формуле:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)\,dxdy$$

4. Вероятность попадания непрерывной случайной величины (X,Y) в область D равна:

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint\limits_{D}\varphi(x,y)\,dxdy$$

Пример 1. Заполнить до конца таблицу совместного распределения двумерной дискретной случайной величины:

X \ Y	1	3
0	0.2	0,3
5	0,1	

Решение. Так как события $\{(X=x_i)(Y=y_j)\}$, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$, составляют полную группу попарно несовместных событий, то сумма вероятностей равна 1, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=0{,}2+0{,}3+0{,}1+p_{22}=0{,}6+p_{22}=1\ \Rightarrow p_{22}=0{,}4,$$

Пример 2. Найти функцию распределения $F(x,y)$ двумерной дискретной случайной величины, заданной таблицей распределения:

X \ Y	0	1	3
-1	0,17	0,11	0,09
1	0,27	0,10	0,26

Решение. Значение $F(x,y)$ в случае дискретных составляющих X и Y находится суммированием всех вероятностей p_{ij} с индексами *i* и *j*, для которых $x_i<x,\ y_j<y$. Тогда, если $x\le -1$ и $y\le 0$, то $F(x,y)=0$ (события $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$ - невозможны). Аналогично получаем:

если $x\le -1$ и $y>0$, то $F(x,y)=0$;

если $-1<x\le 1$ и $y<0$, то $F(x,y)=0$;

если $-1<x\le 1$ и $0<y\le 1$, то $F(x,y)=P(X=-1,Y=0)=0{,}17$;

если $-1<x\le 1$ и $1<y\le 3$, то $F(x,y)=0{,}17+0{,}11=0{,}28$;

если $-1<x\le 1$ и $y>3$, то $F(x,y)=0{,}17+0{,}11+0{,}09=0{,}37$;

если $x>1$ и $y\le 0$, то $F(x,y)=0$;

если $x>1$ и $0<y\le 1$, то $F(x,y)=0{,}17+0{,}27=0{,}44$;

если $x>1$ и $1<y\le 3$, то $F(x,y)=0{,}17+0{,}11+0{,}27+0{,}10=0{,}65$;

если $x>1$ и $y>3$, то $F(x,y)=0,17+0,11+0,09+0,27+0,10+0,26=1$.

Полученные результаты оформим в виде таблицы значений $F(x,y)$:

при	$y\le 0$	$0<y\le 1$	$1<y\le 3$	$y>3$
$x\le -1$	0	0	0	0
$-1<x\le 1$	0	0,17	0,28	0,37
$x>1$	0	0,44	0,65	1

Пример 3. В урне содержится 4 красных и 2 черных шара. Из нее извлекают 2 шара без возвращения. Пусть *X* – число извлеченных красных шаров, *Y* – число извлеченных черных шаров. Составить закон совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y).

Решение. Как *X*, так и *Y* могут принимать значения 0; 1; 2. Вычислим соответствующие вероятности.

$P_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_j\right)$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$.

$P(X=0,Y=0)=0$, $P(X=1,Y=1)=0$ (0 красных, 0 черных)

$P(X=2,Y=0)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=0,4$,(2 красных, 0 черных)

$P(X=0,Y=1)=0$ (0 красных, 1 черный)

$P(X=1,Y=1)=\frac{8}{15}$, $P(X=2,Y=1)=0$ (1 красный, 1 черный)

$P(X=0,Y=2)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$, $P(X=1,Y=2)=0$ (0 красных, 2 черных)

$P(X=2,Y=2)=0$.(2 красных, 2 черных)

Y \ X	0	1	2
0	0	0	0,4
1	0	8/15	0
2	1/15	0	0

Пример 4. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) \text{ при } x>0,\ y>0\\ 0 \text{ при } x<0 \text{ или } y<0\end{cases}.$$

Найти:

1) двумерную плотность вероятности (X,Y);

2) вероятность попадания случайной величины (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми x=0, x=4, y=0, y=1

Решение.

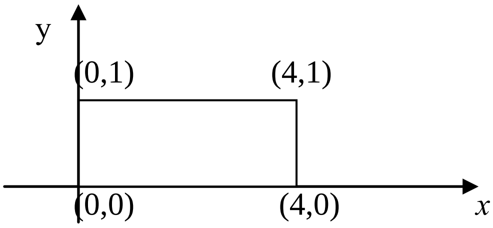
1) Так как $\varphi(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y)$, то дифференцируем F(x,y) сначала по x:

$F'_x=e^{-x}\left(1-e^{-4y}\right)$, а затем по y: $F''_{xy}=4e^{-x}e^{-4y}$, получим:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}4e^{-x}e^{-4y} \text{ при } x>0,\ y>0\\ 0 \text{ при } x<0 \text{ или } y<0\end{cases}.$$

2) Используя формулу и рисунок, получим

$$P[(0<x<4)(0<y<1)]=F(4,1)-F(0,1)-F(4,0)+F(0,0)=(1-e^{-4})^2=0{,}964$$



Пример 5. Система случайных величин (*X,Y*) подчинена закону распределения с плотностью:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}cx^2y \text{ в области D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2}\\ \text{о} \quad \text{вне области D}\end{cases}$$

Требуется:

1. определить коэффициент *c*;
2. вычислить вероятность попадания точки (*X*, *Y*) в область К, ограниченной прямыми *x* = 1, *x* = 2, *y* = 0, *y* = 2;

Решение:

1).Пользуясь свойством плотности, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)=1$ находим коэффициент *c*:

$$\iint\limits_D\varphi(x,y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int cx^2ydy=c\int\limits_0^2 x^2\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2dx=c\int\limits_0^2 2x^2dx=$$

$$2c\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2dx=\frac{16}{3}c\Rightarrow c=\frac{3}{16}$$

2). $P[(X,У)\subset K]=\iint\limits_K\varphi(x,y)dxdy=\frac{3}{16}\int\limits_1^2dx\int\limits_0^2x^2ydy=\frac{3}{16}\int\limits_1^2 2x^2dx=\frac{7}{8}$

Пример 6. Найти функцию распределения двумерной непрерывной случайной величины, если известна ее плотность распределения:

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

Решение: Функция распределения двумерной непрерывной случайной величины и плотность распределения связаны соотношением:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dydy$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dy=\frac{1}{\pi^2}(arctgx+\frac{\pi}{2})(arctgy+\frac{\pi}{2})$$

2. *Отыскание законов распределения составляющих двумерных случайных величин*

Если задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины таблицей совместного распределения, то сумма вероятностей в i-й строке равна вероятности наступления события $X= x_i$:

$$\mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{p}_{i1} + \mathrm{p}_{i2} + \ldots + \mathrm{p}_{in} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{p}_{ij}\ ,$$

а сумма вероятностей в j-м столбце равна вероятности наступления события $Y = y_j$:

$$\mathrm{P}(Y = y_j) = \mathrm{p}_{1j} + \mathrm{p}_{2j} + \ldots + \mathrm{p}_{mj} = \sum_{i=1}^{m}\mathbf{p}_{ij}\ .$$

Используя данные формулы, можно составить законы распределения составляющих дискретных двумерных случайных величин (частные законы распределения):

- для случайной величины X:

X	x_1	x_2	…	x_m
$\mathbf{p}_i$	$\mathbf{P}(X = x_1)$	$\mathbf{P}(X = x_2)$	…	$\mathbf{P}(X = x_m)$

- для случайной величины Y:

Y	y_1	y_2	…	y_n
$\mathbf{p}_j$	$\mathbf{P}(Y = y_1)$	$\mathbf{P}(Y = y_2)$	…	$\mathbf{P}(Y = y_n)$

Если непрерывная двумерная случайная величина представлена плотностью совместного распределения $\boldsymbol{\varphi}$(x,y), то плотность распределения одной их составляющих равна несобственному интегралу с бесконечными пределами от плотности совместного распределения системы, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей:

$$\varphi_1(x)=\frac{dF_1}{dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dy \qquad \varphi_2(y)=\frac{dF_2}{dy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\,dx$$

На рисунке 3 показаны частные распределения двумерной случайной величины (X; Y).

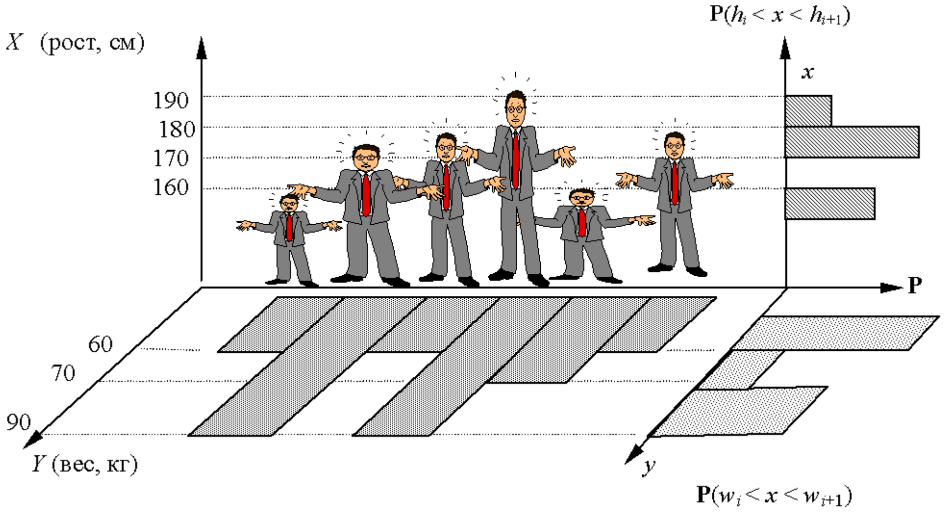


Рис.3. Частные законы распределения двумерной случайной величины (X; Y)

Пример 7. Найти законы распределения составляющих X и Y, если задано распределение двумерной случайной величины в виде таблицы:

X \ Y	2	5	7
-1	0,11	0,13	0,23
3	0,21	0,2	0,12

Решение.

Случайная величина X принимает значения: x_1=-1, x_2=3

Так как P(X=-1)=P(X=-1,Y=2)+ P(X=-1,Y=5)+ P(X=-1,Y=7), а

P(X=3)=P(X=3,Y=2)+ P(X=3,Y=5)+ P(X=3,Y=7),

то проводя суммирование по строкам таблицы получим распределение X:

P(X=-1)=0,11+0,13+0,23=0,47

P(X=3)=0,21+0,2+0,12=0,53

X	-1	3
p_i	0,47	0,53

Аналогично суммируя по столбцам, получим распределение Y:

Y		2	5	7
p_i		0,32	0,33	0,35

Пример 8 . Плотность совместного распределения случайных величин X и Y задана формулой:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}0{,}25(1-xy^3), -1\le x\le 1, \quad -1\le y\le 1\\ 0, \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Используем формулы для нахождения плотности распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины:

Найдем $\varphi_1(x)=\int_{-1}^{1}0{,}25\left(1-xy^3\right)dy=0{,}25\left(y-\frac{xy^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}=0{,}5$ и

$$\varphi_2(y)=\int_{-1}^{1}0{,}25\left(1-xy^3\right)dx=0{,}25\left(x-\frac{x^2y^3}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}=0{,}5.$$

3. Понятие зависимых и независимых случайных величин

Определение: Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение принимает другая случайная величина

.

Теорема: Для того чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы ***F(x,y)*** была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x,y)=F(x)\,F(y)$$

Дифференцируя дважды данное равенство по аргументам x и ***y***, можно показать, что для независимых непрерывных случайных величин **X** и **Y** плотность совместного распределения равна произведению плотностей распределения составляющих

$$\varphi(x,y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

Пример 9. Плотность совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (**X,Y**) равна

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, \text{если } x^2+y^2\le 1\\ 0, \text{если } x^2+y^2>1\end{cases}$$

Установить зависимыми или независимыми случайными величинами являются составляющие X и Y

Решение: Найдем плотность распределения составляющих X и **Y.**

$$\varphi(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

Аналогично найдем плотность распределения составляющей Y:

$$\varphi(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

Условие ***φ (x,y)= φ (x)·φ (y)*** не выполняется, следовательно, в данном случае система двух случайных величин (**XY**) образована зависимыми случайными величинами **X** и **Y.**

Пример 10. Законы плотности распределения независимых составляющих *X* и *Y:*

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases} \qquad \varphi_2(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2} \text{ при } y > 0, \\ 0 \text{ при } y < 0 \end{cases}$$

Найти: 1) плотность совместного распределения; 2) функцию распределения системы (X,Y).

Решение. 1) В силу независимости составляющих *X* и *Y* плотность совместного распределения

$\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y) = 2xe^{-x^2}\cdot 2ye^{-y^2} = 4xye^{-x^2-y^2}$ при $x > 0,\ y > 0$ и

$\varphi(x,y) = 0$ при $x < 0$ или $y < 0$.

2) Найдем $F_1(x)$ и $F_2(y)$.

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(x)dx = \int_0^x 2xe^{-x^2}dx = -e^{-x^2}\Big|_0^x = 1 - e^{-x^2}.$$

Аналогично $F_2(y) = 1 - e^{-y^2}$.

Тогда $F(x,y) = F_1(x)F_2(y) = \left(1 - e^{-x^2}\right)\left(1 - e^{-y^2}\right)$ при $x > 0$, $y > 0$,

$F(x,y) = 0$ при $x < 0$ или $y < 0$.

4. Условные законы распределения вероятностей составляющих двумерной случайной величины

Зная совместный закон распределения можно найти законы распределения составляющих, входящих в систему. На практике чаще стоит обратная задача – по известным законам распределения случайных величин найти их совместный закон распределения.

В общем случае эта задача является неразрешимой, т.к. закон распределения случайной величины ничего не говорит о связи этой величины с другими случайными величинами. При этом, если случайные величины зависимы между собой, то закон распределения не может быть выражен через законы распределения составляющих. Все это приводит к необходимости рассмотрения условных законов распределения.

Определение: Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется *условным законом распределения.*

Условный закон распределения можно задавать как плотностью распределения, так и законом распределения.

Если двумерная случайная величина задана таблицей совместного распределения, то условные вероятности составляющих Х и У вычисляют по формулам:

$$P\left(x_i \left| y_j\right.\right) = \frac{p_{ij}}{p\left(Y = y_j\right)}, \quad P\left(y_j \left| x_i\right.\right) = \frac{p_{ij}}{p\left(X = x_i\right)}$$

Значение $\mathbf{p}_{ij}$, берут из таблицы совместного распределения. Условный закон распределения случайной величины X имеет вид

X	x_1	x_2	…	x_m
$\mathbf{P}(x_i / y_j)$	$\mathbf{P}(x_1/y_j) = \frac{\mathbf{p}_{1j}}{\mathbf{p}(y_j)}$	$\mathbf{P}(x_2/y_j) = \frac{\mathbf{p}_{2j}}{\mathbf{p}(y_j)}$	…	$\mathbf{P}(x_m/y_j) = \frac{\mathbf{p}_{mj}}{\mathbf{p}(y_j)}$

Сумма вероятностей условного распределения равна единице:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{p}(x_i / y_j) = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}(y_j / x_i) = 1$$

Для непрерывных величин, заданных плотностью распределения условные законы распределения составляющих Х и У находятся по формулам:

$$\varphi\left(x \middle| y\right) = \frac{\varphi\left(x, y\right)}{\varphi_2\left(y\right)} \qquad \varphi\left(y \middle| x\right) = \frac{\varphi\left(x, y\right)}{\varphi_1\left(x\right)}$$

Свойства функций $\varphi(x|y)$ и $\varphi(y|x)$

1. Данные функции неотрицательны.

2.Несобственный интеграл с бесконечными пределами от каждой из них равен единице, т.е.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x|y)dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y|x)dy = 1$$

Если случайные величины X и Y независимые, т.е. закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение принимает вторая величина, то условные и безусловные законы X и Y совпадают. В частности, $\varphi\left(x \middle| y\right) = \varphi_1\left(x\right)$ и $\varphi\left(y \middle| x\right) = \varphi_2\left(y\right)$.

Пример 11. Задано распределение двумерной случайной величины:

X \ Y	2	5	7
-1	0,11	0,13	0,23
3	0,1	0,12	0,09
4	0,11	0,08	0,03

Найти:

а) условный закон распределения составляющей X при условии $Y=5$;

б) условный закон распределения Y при условии, что $X=4$.

Решение.

а)Найдем условные вероятности составляющей X при условии $Y=5$

$P\left(X=-1 \middle| Y=5\right)=\dfrac{0,13}{0,33}=0,394$, $\quad P\left(X=3 \middle| Y=5\right)=\dfrac{0,12}{0,33}=0,364$,

$P\left(X=4 \middle| Y=5\right)=\dfrac{0,08}{0,33}=0,242$,

Тогда условный закон распределения X при условии $Y=5$ имеет вид:

X	-1	3	4
y=5	0,394	0,364	0,242

Контроль: $0,394+0,364+0,242=1$.

б) Аналогично находим условный закон Y при условии $X=4$:

У	2	5	7
X=4	0,5	0,364	0,136

Контроль: $0,5+0,364+0,136=1$.

Пример 12. Плотность совместного распределения случайных величин X и Y задана формулой:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} c\left(1-xy^3\right), & -1\le x\le 1, \quad -1\le y\le 1 \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}.$$

Найти условные плотности распределения X и Y.

Решение. Так как $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} c\left(1-xy^3\right)dxdy=1$, то вычислив

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-xy^3\right)dydx==\int\limits_{-1}^{1}\left(y-x\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1}dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{4}+1+\frac{x}{4}\right)dx=2x\Bigg|_{-1}^{1}=4,$$

следовательно $4c=1$ и $c=0,25$.

$\varphi_1(x)=0,5$ и $\varphi_2(y)=0,5$ (см. пример 8)

Условный закон распределения *X:*

$$\varphi(x|y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_1(y)}=\frac{0,25\left(1-xy^3\right)}{0,5}=\frac{1}{2}\left(1-xy^3\right).$$

Аналогично,

$$\varphi(y|x)=\frac{1}{2}\left(1-xy^3\right).$$

5. *Числовые характеристики системы дискретных и непрерывных случайных величин*

Числовые характеристики составляющих X и Y *находятся по следующим формулам:*

для дискретных составляющих X и Y

$$M(X)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_{ij}=a_x \qquad M(Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}y_j\,p_{ij}=a_y$$

$$D(X)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a_x\right)^2 p_{ij} \qquad D(Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(y_j-a_y\right)^2 p_{ij}$$

для непрерывных составляющих X и Y

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x,y)dxdy=a_x \qquad M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\varphi(x,y)dxdy=a_y$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-a_x\right)^2\cdot\varphi(x,y)dxdy \qquad D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-a_y\right)^2\cdot\varphi(x,y)dxdy$$

$$\delta_x=\sqrt{D(X)} \qquad \delta_y=\sqrt{D(Y)}$$

Математическое ожидание, дисперсия, а так же среднее квадратическое отклонение не определяют степень зависимости составляющих X и Y. Эту роль выполняют корреляционный момент K_{xy} (ковариация $\operatorname{cov}(X,Y)$), который определяется следующим образом:

Для дискретных случайных величин:

$$\text{K}_{\text{xy}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))\mathbf{p}_{ij} \quad \text{или} \quad K_{xy}=M\left(\left(x-a_x\right)\cdot\left(y-a_y\right)\right)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-a_x\right)\left(y-a_y\right)\varphi(x,y)\,dxdy$$

Корреляционный момент можно вычислить по формуле:

$$K_{xy}=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot(Y).$$

Если X и Y независимы, то $K_{xy}=0$. *Если* $K_{xy}\neq 0$, *то X и Y зависимые случайные величины.*

В случае $K_{xy}=0$ случайные величины X и Y называют некоррелированными, при этом они могут быть как зависимыми, так и независимыми.

Ковариация X и Y характеризует не только степень зависимости случайных величин, но и их рассеяние вокруг точки $\left(a_x, a_y\right)$. Кроме того, K_{xy}- размерная величина, это значит, что величина корреляционного момента зависит от единиц измерения случайных величин. Например, если при измерении величин X и Y в сантиметрах получили $К_{xy}$ = 1 см^2, то при измерении X и Y в миллиметрах получим $К_{xy}$ = 100 мм^2. Такая зависимость корреляционного момента от единиц измерения затрудняет сравнение различных систем случайных величин и что затрудняет ее использование для оценки степени зависимости для различных случайных величин.

Для оценки зависимости вводится безразмерная величина коэффициент корреляции: $r_{xy}=\dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$,

где σ_x и σ_y - среднеквадратические отклонения X и Y.

Свойства коэффициента корреляции:

1. Область значений: $-1\le r_{xy}\le 1$.

2. Если X и Y – независимые случайные величины, то $r_{xy}=0$.

3. Если X и Y связаны линейной функциональной зависимостью $Y=AX+B$, то $\left|r_{xy}\right|=1$ и наоборот.

Пример 13. Плотность совместного распределения случайных величин X и Y задана формулой

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}0{,}25(1-xy^3), & -1\le \text{x}\le 1,\ -1\le \text{y}\le 1\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

Найти: ковариацию X и Y.

<u>Решение.</u> Для непрерывных случайных величин ковариация находится по формуле: $K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-a_x\right)\left(y-a_y\right)\varphi\left(x,y\right)dxdy$

Плотности распределения составляющих равны:
$\varphi_1(x)=0{,}5$ и $\varphi_2(y)=0{,}5$ (см. пример 8)

Вычислим $M\left(X\right)$=a_x и $M\left(Y\right)$=a_y.

$$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi_1\left(x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1} x\cdot 0,5dx=\frac{1}{4}x^2\Bigg|_{-1}^{1}=0.$$

Аналогично $M\left(Y\right)=0$.

Вычислим $K_{xy}=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} xy\cdot\left(1-xy^3\right)dxdy=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{x^2y^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}dx=-0,2$.

Пример 14 . Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{16}x^2y & \text{в области D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2}\\ \text{о} & \text{вне области D}\end{cases}$$

Требуется найти:

1. Математические ожидания M(X), M(Y)
2. Средние квадратичные отклонения σ_x, σ_y.

Решение:

1. для непрерывных составляющих X и Y

$$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi\left(x,y\right)dxdy=a_x \qquad M\left(Y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\varphi\left(x,y\right)dxdy=a_y$$

$$\text{M(X)}=\frac{3}{16}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 x^3ydy=\frac{3}{8}\int\limits_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2=\frac{3}{2},$$

$$\text{M(Y)}=\frac{3}{16}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 x^2y^2dy=\frac{3}{16}\int\limits_0^2 x^2\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

2. Так как $\delta_x=\sqrt{D(X)}$, то найдем предварительно D(X)используя формулу $D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-a_x\right)^2\cdot\varphi\left(x,y\right)dxdy$

$$\text{D(X)}=\frac{3}{16}\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^2 yx^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx==\frac{3}{16}\int\limits_0^2 ydy\int\limits_0^2 x^2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx=\frac{3}{16}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2\int\limits_0^2\left(x^4-3x^3+\frac{9}{4}x^2\right)dx=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}+\frac{9}{4\cdot 3}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{8}\left(\frac{32}{5}-12+6\right)=\frac{3}{20}$$

Для нахождения дисперсии случайной величины Y *так же можно* воспользоваться формулой:

$$D(Y)=M(Y^2)-(MY)^2.$$

$$M(Y^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\ f(x,y)dxdy=\frac{3}{16}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 x^2y^3dy==\frac{3}{16}\int\limits_0^2 x^2\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^2dx=\frac{3}{4}\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{3}{4}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=2;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (MY)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{3}{20}} \approx 0{,}3873, \qquad \sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}4714.$$

Пример 15. Найти коэффициент корреляции r_{xy}, если закон распределения системы двух случайных величин задан таблицей:

Y \ X	0	1	2
0	0	0	0,4
1	0	8/15	0
2	1/15	0	0

Решение:

Коэффициент корреляции находится по формуле: $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

Составим законы распределения X и Y.

X	0	1	2
p_i	1/15	8/15	0,4

Y	0	1	2
p_j	0,4	8/15	1/15

Найдем $M(X) = 0 \cdot \dfrac{1}{15} + 1 \cdot \dfrac{8}{15} + 2 \cdot 0{,}4 = \dfrac{4}{3}$

$M(X) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot \dfrac{8}{15} + 2 \cdot \dfrac{1}{15} = \dfrac{2}{3}$

Вычислим

$$K_{xy} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - a_x\right)\left(y_j - a_y\right) \cdot p_{ij} = \left(2 - \frac{4}{3}\right)\left(0 - \frac{2}{3}\right) \cdot 0,4 + \left(1 - \frac{4}{3}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{8}{15} + \left(0 - \frac{4}{3}\right)\left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{15} = -\frac{16}{45}.$$

Вычислим D_x и D_y.

$$D_x = M\left(X^2\right) - M^2\left(X\right) = 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot 0,4 - \frac{16}{9} = \frac{16}{45}$$

$$D_y = M\left(Y^2\right) - M^2\left(Y\right) = 1 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{1}{15} - \frac{4}{9} = \frac{16}{45}.$$

Вычислим $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \dfrac{-\frac{16}{15}}{\frac{16}{15}} = -1.$

Следовательно, X и Y связаны линейной зависимостью.

Пример 16. Закон распределения системы двух случайных величин задан таблицей.

Y / X	–2	1	3
–1	0	0,1	0,3
1	0,1	0	0,1
4	0	0,2	0,2

Найти:

а) корреляционный момент $К_{xy}$

б) коэффициент корреляции r_{xy}

в) проверить независимость случайных величин *X* и *Y*

Решение:

а) Корреляционный момент находится по формуле:

$К_{xy} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))\mathbf{p}_{ij}$.

Составим законы распределения *X* и *Y* и найдем их числовые характеристики:

X	–1	1	4
$\mathbf{P}_i$	0,4	0,2	0,4

$M(X) = -1\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}4 = 1{,}4$;

$D(X)=(-1-1{,}4)^2\cdot 0{,}4 + (1-1{,}4)^2\cdot 0{,}2 + (4-1{,}4)^2\cdot 0{,}4 = 5{,}04$;

$\sigma(X) = 2{,}245$.

Y	–2	1	3
$\mathbf{P}_j$	0,1	0,3	0,6

$M(Y) = -2\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}6=1{,}9$;

$D(Y) =(-2-1{,}9)^2\cdot 0{,}1 + (1-1{,}9)^2\cdot 0{,}3 + (3-1{,}9)^2\cdot 0{,}6 = 2{,}49$.

$\sigma(Y) = 1{,}578$.

Для удобства использования формулы $К_{xy} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - M(X))(y_j - M(Y))\mathbf{p}_{ij}$

составим таблицу системы центрированных случайных величин $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$, где

$\overset{\circ}{X} = X - M(X) = X - 1{,}4$; $\overset{\circ}{Y} = Y - M(Y) = Y - 1{,}9$

Y / X	–2	1	3
–1	0	0,1	0,3
1	0,1	0	0,1
4	0	0,2	0,2

$\overset{\circ}{Y}$ / $\overset{\circ}{X}$	–3,9	–0,9	1,1
–2,4	0	0,1	0,3
–0,4	0,1	0	0,1
2,6	0	0,2	0,2

Вычисляем корреляционный момент:

$K_{xy} = -2{,}4 \cdot 0\,(-3{,}9) - 2{,}4 \cdot 0{,}1(-0{,}9) - 2{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}1 - 0{,}4 \cdot 0{,}1(-3{,}9) - 0{,}4 \cdot 0\,(-0{,}9)$ $- 0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}1 + 2{,}6 \cdot 0\,(-3{,}9) + 2{,}6 \cdot 0{,}2(-0{,}9) + 2{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}1 = -0{,}36.$

б) Находим коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}36}{\sqrt{5{,}04 \cdot 2{,}49}} = -0{,}1016$$

Величина коэффициента корреляции близка к нулю, поэтому можно считать, что случайные величины X и Y слабозависимы.

в) Для того чтобы проверить независимость случайных величин X и Y, воспользуемся формулой:

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i)\,\mathbf{P}(Y = y_j)$$

и найдем, например, $\mathbf{P}\,(X = -1,\ Y = 1) = 0{,}1$; $\mathbf{P}\,(X = -1) = 0{,}4$; $\mathbf{P}\,(Y = 1) = 0{,}3$; $\mathbf{P}\,(X = -1,\ Y = 1) \neq \mathbf{P}\,(X = -1)\,\mathbf{P}\,(Y = 1)$ (так как $0{,}1 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}3$). Поэтому случайные величины не являются независимыми.

6. *Вопросы по разделу*

1. Дайте определение многомерной случайной величины.
2. Что называется законом распределения вероятностей двумерной случайной величины.
3. Какими способами может быть задан закон распределения двумерной случайной величины?
4. Дайте определение функции распределения двумерной случайной величины.
5. Перечислите свойства функции распределения двумерной случайной величины и поясните их.
6. Дайте определение плотности совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины.
7. Как связаны функция распределения двумерной случайной величины и ее плотность распределения.
8. Перечислите свойства двумерной плотности вероятности и поясните их .
9. Как определить вероятность попадания двумерной случайной величины в заданную область.
10. Дайте определение условной плотности вероятности составляющих двумерной случайной величины.
11. Какие числовые характеристики определяются для двумерной случайной величины?
12. Запишите выражения для определения числовых характеристик двумерной случайной величины.
13. Дайте определение независимых случайных величин.
14. Перечислите свойства ковариации.
15. Какие значения может принимать коэффициент корреляции?
16. В каком случае коэффициент корреляции по абсолютной величине равен единице?
17. В каком случае коэффициент корреляции равен нулю?
18. Что следует из равенства нулю коэффициента корреляции?
19. Перечислите свойства коэффициента корреляции.

7. Задания для аудиторной работы

1. Найти вероятность попадания случайной точки (x,y) в прямоугольник, если известна функция распределения. Прямоугольник ограничен прямыми $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{6}, y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{3}$ функция распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y, 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

2. Заполнить до конца таблицу совместного распределения двумерной дискретной случайной величины:

X \ Y	1	2
0	0,1	0,15
2	0,2	0,15
3	p	0,25

Ответ: 0,15

3. Двумерная случайная величина (X,Y)) имеет плотность вероятности

$$\varphi(x,y)=\frac{C}{\pi^2(1+x^2)(2+y^2)}.$$

Найти:
а) величину C;
б) функцию распределения F(x,y);
в) вероятность попадания случайной точки (x,y) в прямоугольник, ограниченный прямыми x=0, y= 0, x= 1 $y=\sqrt{2}$

Ответ: а) $C=\sqrt{2}$; б) $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)$; в) $\frac{1}{16}$

4. Дискретная двумерная случайная величина (X,Y) заданна законом распределения:

X / Y	20	30	40	50	60
11	0,02	0	0	0	0
16	0,04	0,06	0	0	0
21	0	0,03	0,06	0,02	0
26	0	0	0,45	0,08	0,04
31	0	0	0,04	0,06	0,07
36	0	0	0	0	0,03

Найти:

а)Частные законы распределения.

б) Условное математическое ожидание M[X/Y=40).

В) Условную дисперсию D[Y/X=36).

г) Ковариацию K_{xy}.

Д) Коэффициент корреляции r_{xy}.

Ответ:

а)

X	11	16	21	26	31	36
P	0,02	0,10	0,11	0,57	0,17	0,03

Y	20	30	40	50	60
P	0,06	0,09	0,55	0,16	0,14

б) M[X/Y=40] = 25.82; в) D[Y/X=36] = 0; г) K_{xy}. = 38.11; д) r_{xy} =0,78

5. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X,Y)

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y), \text{при } 0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2}.\\ 0, \text{ вне области}\end{cases}$$

Найти: 1. Функцию распределения F(x,y) этой величины. 2. Вычислить вероятность того, что X и Y примут значение: $X<\frac{\pi}{6},\ Y<\frac{\pi}{6}$.

Ответ:

1. $$F(x,y)=\begin{cases}0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)], \textit{при} \quad 0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2}.\\ 0, \text{ вне прямоугольника}\end{cases}$$

2. $$P\left(X<\frac{\pi}{6}, Y<\frac{\pi}{6}\right)=0{,}67.$$

6. Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно плотности:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0, \text{ при x} < \text{-1 или x} > 1\\ 0{,}5, \text{ при -1} < \text{x} < 1\end{cases} \qquad \varphi_2(y)=\begin{cases}0, \text{ при y} < 0 \text{ или y} > 2\\ 0{,}5, \text{ при } 0 < \text{y} \le 2\end{cases}$$

Найти: 1)функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$;

2)плотность распределения вероятностей системы (X,Y);

3)функцию распределения системы (X,Y).

***Ответ:* 1).** $F_1(x)=\begin{cases}0, \textit{при } \ x\le 0\\ 0{,}5(x+1), \ \textit{при} -1<x\le 1\\ 1 \ \ \textit{при } \ x>1\end{cases}$, $F_2(y)=\begin{cases}0, \textit{при } \ y\le 0\\ 0{,}5y \ , \ \textit{при } \ \ 0<x\le 2\\ 1 \ \ \textit{при } \ y>2\end{cases}$

2). $F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{при x} \le -1, \text{или y} \le 0\\ 0{,}25(x+1)y, & \text{при } -1<x\le 1,\ 0<y\le 2\\ 0{,}5(x+1), & \text{при } -1<x\le 1,\ y>2\\ 0{,}5y & \text{при } x>1, 0<y\le 2\\ 1 & \text{при } x>1,\ y>2\end{cases}$

3) $\varphi(x,y)=\begin{cases}0{,}25, \text{ при } -1<x<1, 0<y<1\\ 0, \text{в остальных случаях}\end{cases}$

8. Варианты работы для расчетно-графической работы

<u>Задание 1</u>. Распределение дискретной двумерной случайной величины (ξ,η) задано с помощью таблицы. Найти:

1. частные распределения случайных величин *X* и *Y*;
2. математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$; дисперсии $D(X)$, $D(Y)$ и средние квадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$;
3. условные распределения случайных величин:

а) *X* при условии, что $Y = y_3$, б) *Y* при условии, что $X = x_2$;

4. корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции r_{xy}
5. установить независимость случайных величин *X* и *Y*.

<u>Задание 2</u>. Непрерывная двумерная случайная величина (Х,У) задана совместной плотностью распределения вероятностей. Найти:

1. функцию распределения двумерной случайной величины F(x,y);
2. законы плотности распределения независимых составляющих *X* и *Y*;
3. математические ожидания составляющих X и Y M(x),M(y);
4. дисперсии составляющих Х и У D(x), D(y);
5. условные математические ожидания и дисперсии M(X/У), D(X/У);
6. коэффициент корреляции;
7. установить независимость случайных величин *X* и *Y*.

Вариант 1

<u>Задание 1</u>.

η \ ξ	-1	0	1	2
-1	0,1	0,2	0,1	0,05
1	0,05	0,05	0,3	0,15

<u>Задание 2</u>.

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} C(xy+1), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вариант 2

<u>Задание 1</u>.

η \ ξ	-2	0	1	2
1	0,15	0,1	0,1	0,25
2	0,1	0,15	0,05	0,1

Задание 2.

$$\varphi(x, y)=\begin{cases} C(xy+1), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Вариант 3

Задание 1.

η \ ξ	-1	0	1
-1	0,1	0,2	0,1
0	0,05	0,05	0,3
1	0,05	0,1	0,05

Задание 2.

$$\varphi(x, y)=\begin{cases} C(x+y+1), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Вариант 4

Задание 1.

η \ ξ	-1	0	4
-1	0,1	0,2	0,1
0	0,1	0,05	0,25
1	0,05	0,1	0,05

Задание 2.

$$\varphi(x, y)=\begin{cases} C(x+y+1), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Вариант 5

Задание 1.

η \ ξ	0,2	0,5	0,8
0,04	0,15	0,3	0,35
0,08	0,05	0,12	0,03

Задание 2.

$$\varphi(x, y)=\begin{cases} C(x+y^2), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Вариант 6

<u>Задание 1</u>.

η \ ξ	0,2	0,5	0,8
0,04	0,15	0,3	0,35
0,08	0,05	0,12	0,03

<u>Задание 2.</u>

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} C\left(x + y^2\right), & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вариант 7

<u>Задание 1</u>.

η \ ξ	0,1	0,15	0,2
0,3	0,25	0,15	0,32
0,6	0,1	0,05	0,13

<u>Задание 2.</u>

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} C\left(xy + y^2\right), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вариант 8

<u>Задание 1</u>.

η \ ξ	0,1	0,15	0,2
0,3	0,25	0,15	0,32
0,6	0,1	0,05	0,13

<u>Задание 2.</u>

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} C\left(xy + y^2\right), & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вариант 9

<u>Задание 1</u>.

η \ ξ	-2	2	3
0	0,05	0,05	0,05
1	0,2	0,1	0,3
2	0,1	0,05	0,1

Задание 2.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + y), & -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вариант 10

Задание 1.

η \ ξ	-1	0	1
0	0,05	0,05	0,1
1	0,2	0,1	0,25
2	0,1	0,05	0,1

Задание 2.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + y), & -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Критерии оценки расчетно-графической работы:

Расчетно-графическая работа оценивается по бально-рейтинговой системе, максимальный бал-15, и включает следующие критерии:

1. **Качество и правильность выполненных расчетов по задачам-максимальный балл -7 баллов**

- РГР выполнена полностью, задания выполнены правильно, выполненные расчеты верны -7 баллов.

- РГР выполнена полностью, ход решения заданий верен, имеются неточности в расчетах – 0-7 баллов.

- РГР выполнена не полностью – 0 баллов.

2. **Своевременность выполнения – максимальный балл -3 балла**

- Работа выполнена верно, в предусмотренные сроки – 3 балла.

- Работа выполнена верно, сдана не вовремя – 0 баллов

3. **Содержание и качество ответов на вопросы, поставленные преподавателем в ходе защиты расчетно-графической работы максимальный балл -5 баллов**

– Дан полный, развернутый ответ на поставленный преподавателем вопрос – 5 баллов

- Дан недостаточно полный ответ, студент не владеет глубокими знаниями по разделу, действует по алгоритму 0-5 баллов.

- Ответ представляет собой разрозненные знания с существенными ошибками по вопросу – 0 баллов

Приложение

Технический институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова» в г. Нерюнгри
Кафедра математики и информатики

Расчетно-графическая работа
по дисциплине: **Теория вероятностей и математическая статистика**
по теме: **Системы двух случайных величин**
__ вариант

Выполнил: студент гр.
____
____
(ФИО студента)
Проверил:
____
(должность, ФИО преподавателя)

г. Нерюнгри, 201__ г.

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. –479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк.,1998. – 400 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
НА ТЕМУ «СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ
01.03.02 «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»,
09.03.03 «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

Составители:
В.М. Самохина, М.Ю. Макарова

Технический редактор *Л.В. Николаева*

Подписано в печать 01.09.2016. Формат 60x84/16.
Бумага тип. №2. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Печ. л. 2,1. Тираж 50 экз. Заказ 321.
Издательство ТИ (ф) СВФУ, 678960, г. Нерюнгри, ул. Кравченко, 16.

Отпечатано в ТИ (ф) ФГАОУ ВО «СВФУ»
г. Нерюнгри